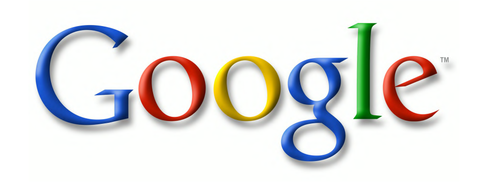




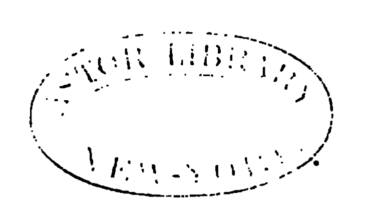
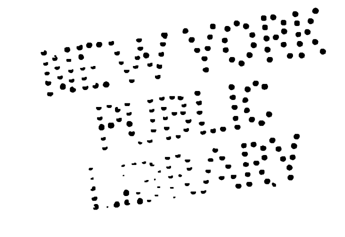




(Legendre)
OSW

NOUVELLES MÉTHODES
POUR LA DÉTERMINATION
DES
ORBITES DES COMÈTES;

PAR A. M. LEGENDRE,
Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

A PARIS,
Chez Firmin DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Éditions stéréotypes, rue de Thionville, n° 116.
AN XIII — 1805.

NOUVELLES MÉTHODES
POUR LA DÉTERMINATION
DES ORBITES DES COMÈTES.

Le problême dont je m'occuperai dans ce Mémoire, consiste à déterminer l'orbite d'une comète d'après trois observations données de sa longitude et de sa latitude. Depuis Newton, qui le premier a donné pour sa solution des constructions géométriques fort ingénieuses, ce problême a fait successivement l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres.

Parmi ceux qui l'ont traité avec le plus de succès, on doit distinguer particulièrement Lambert, qui a donné de très-beaux théorêmes sur le mouvement des planètes et des comètes dans son ouvrage intitulé: *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, et dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1771.

Dans ce même recueil, année 1778, La Grange a discuté les principales méthodes connues jusqu'alors, et après avoir fait connoître les causes de leur imperfection, il a donné l'analyse complète du problême, fondée sur une belle théorie à laquelle il a ajouté ensuite de nouveaux développemens dans le volume de 1783. Cette méthode n'auroit sans doute rien laissé à desirer, si son illustre auteur en eût fait l'application à des exemples, ce qui l'auroit conduit lui-même à y apporter les modifications nécessaires pour en rendre l'usage facile dans la pratique.

La Place, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1780, a proposé une autre méthode qui revient à supposer connue une portion infiniment petite de la trajectoire apparente de la comète, et à conclure de cette portion la grandeur et la position de la trajectoire vraie. Par la supposition des quantités infiniment petites, les formules se simplifient et conduisent à une solution peu compliquée; mais la difficulté est

de déterminer avec précision les coëfficiens différentiels du premier et du second ordre, tant de la longitude que de la latitude.

Il semble, au premier coup-d'œil, qu'en liant ensemble plusieurs observations par la méthode des interpolations, on en déduira les coëfficiens dont il s'agit avec d'autant plus d'exactitude qu'il y a plus d'observations combinées ; et cela auroit lieu en effet, si les observations étoient exemptes d'erreur, ou si les lieux de la comète étoient calculés d'après une formule exacte ; mais il en est autrement dans l'état réel des choses. Comme toutes les observations sont affectées de quelqu'erreur, et que cette erreur ne suit aucune loi d'une observation à l'autre, il s'ensuit que plus on combinera d'observations, et plus l'erreur des coëfficiens différentiels qui en sont déduits pourra devenir sensible.

En effet, considérons trois observations de longitude a', a'', a''', faites à des intervalles de temps que pour plus de simplicité nous supposerons égaux à l'unité. Ces longitudes répondront aux temps -1, 0, $+1$, et la longitude pour un temps quelconque t compris entre -1 et $+1$, aura pour expression générale,

$$x = a'' + \tfrac{1}{2}(a''' - a')t + \tfrac{1}{2}(a''' - 2a'' + a')t^2;$$

d'où l'on déduit les coëfficiens différentiels pour le temps 0, Époque de l'observation moyenne

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \tfrac{1}{2}(a''' - a')\\ \frac{ddx}{dt^2} &= a''' - 2a'' + a'.\end{aligned}\right\}\quad (a)$$

Considérons ensuite les cinq longitudes a, a', a'', a''', a^{IV}, qui répondent pareillement aux temps -2, -1, 0, $+1$, $+2$, respectivement ; on en déduira la longitude au bout du temps t, $x = a'' + At + Bt^2 + Ct^3 + \&c.$, où l'on aura

$$\left.\begin{aligned}\text{A ou } \frac{dx}{dt} &= \tfrac{2}{3}(a''' - a') - \tfrac{1}{12}(a^{\text{IV}} - a)\\ \text{2B ou } \frac{ddx}{dt^2} &= \tfrac{4}{3}(a''' - 2a'' + a') - \tfrac{1}{12}(a^{\text{IV}} - 2a'' + a).\end{aligned}\right\}\quad (b)$$

Supposons maintenant que l'erreur sur la longitude α soit $\delta a'$; alors, suivant les équations (a), les erreurs des coëfficiens différentiels, dues à cette cause, seront

$$\delta\frac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2}\delta a', \quad \delta\frac{ddx}{dt^2} = \delta a'.$$

Mais par les équations (b) les erreurs de ces coëfficiens seroient

$$\delta\frac{dx}{dt} = -\tfrac{2}{3}\delta a', \quad \delta\frac{ddx}{dt^2} = \tfrac{4}{3}\delta a';$$

d'où l'on voit que dans le cas de cinq observations combinées, l'erreur des coëfficiens différentiels, due à la cause mentionnée, est plus grande dans le rapport de 4 à 3, que celle qui a lieu dans le cas de trois observations. Elle augmenteroit encore si on combinoit ensemble plus de cinq observations.

D'après ces réflexions, j'ai pensé que ce qu'il y avoit de mieux à faire dans le problême des comètes, étoit de partir des données immédiates de l'observation, et d'employer tous les moyens pour simplifier, autant qu'il est possible, les formules et les équations qui servent à déterminer les élémens de l'orbite. C'est l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire.

Je l'ai divisé en deux parties : la première comprend l'analyse générale du problême, avec deux applications détaillées de la solution qui en résulte aux comètes de 1781 et de 1769.

Dans l'analyse je suppose, comme cela est indispensable, que les trois observations données ne comprennent pas un intervalle de temps de plus de 15 à 20 jours, afin que les séries qui expriment les coordonnées, tant de l'orbite de la comète que de celle de la terre, soient suffisamment convergentes, et qu'on ne soit pas obligé d'employer les termes qui contiennent des puissances du temps supérieures à la troisième.

Après avoir mis les équations générales du problême sous la forme la plus simple dont elles paroissent susceptibles, je développe en particulier, avec beaucoup d'étendue, le cas où les trois observations sont faites à des intervalles de temps égaux. Cette supposition, qui ne restreint guère la généralité du problême, simplifie beaucoup les formules, et contribue même à

les rendre plus exactes, par la disparition de plusieurs termes dont il faudroit tenir compte, si les intervalles de temps entre les observations n'étoient pas égaux.

Lorsqu'on ne fait aucune supposition sur la nature de l'orbite, le problême offre précisément autant d'équations que d'inconnues; mais alors il y a une circonstance dans laquelle les formules pourroient ne pas donner des résultats assez exacts. C'est lorsque l'orbite apparente est située à très-peu près dans le plan d'un même grand cercle, et dans ce cas, la distance de la comète au soleil, lors de l'observation moyenne, diffère toujours très-peu de la distance de la terre au soleil. Si les méthodes analytiques ont peu de succès dans ce cas particulier, il en résulte au moins une connoissance utile sur la distance de la comète au soleil, laquelle servira toujours à diriger les premiers essais des calculateurs. D'ailleurs, en choisissant trois autres observations, à quelque distance des premières, on évitera l'inconvénient de ce cas particulier, à moins qu'il ne se rencontre tout-à-la-fois que la comète soit très-voisine du périhélie, et que la distance périhélie diffère très-peu de la distance de la terre au soleil; circonstances qui, tout en faisant exception, avanceroient beaucoup vers la connoissance de la véritable orbite.

Mais comme on suppose communément, d'après les résultats de l'observation, que l'orbite est parabolique, cette condition donne une équation de plus que d'inconnues, et on a la faculté de choisir entre les diverses combinaisons des équations, celle qui doit conduire aux résultats les plus exacts. Je suis entré à ce sujet dans une discussion fort étendue. J'ai fait voir quelles sont les équations qui méneroient, dans certains cas, à des résultats défectueux, et quelles sont celles sur lesquelles on peut établir la solution la moins sujette à être affectée des erreurs des observations.

Les équations dont il s'agit donnent immédiatement par leur résolution les distances de la comète au soleil et à la terre; il faut ensuite en conclure les élémens de l'orbite. Je donne pour

cet effet toutes les formules nécessaires, et j'ajoute les moyens de reconnoître avec certitude si le mouvement est direct ou rétrograde ; si la comète marche vers le périhélie, ou si elle a déjà passé par ce point ; si le nœud dont on a calculé la longitude est le nœud descendant ou le nœud ascendant ; de sorte qu'avec toutes ces directions les calculs pourront s'exécuter en quelque sorte mécaniquement, sans qu'on ait lieu de craindre de se tromper sur le signe d'aucune quantité, ou sur la position d'aucun des points qu'il importe de déterminer.

Après avoir traité complètement le cas où les intervalles de temps entre les observations sont égaux, il falloit au moins tenter de vaincre les difficultés d'analyse que présente le problème considéré dans toute sa généralité. Je suis donc revenu sur les équations générales du problème, et après leur avoir fait subir différentes réductions successives, j'ai trouvé assez heureusement qu'elles étoient susceptibles d'une solution presque aussi simple que celle du premier cas ; de sorte que sans aucune interpolation, on pourra appliquer immédiatement le calcul à trois observations données, quels que soient les intervalles de temps qui les séparent.

Venant ensuite aux applications qui sont relatives à la seconde comète de 1781 et à la comète de 1769, j'entre dans les détails qui peuvent jeter du jour sur toutes les applications en général. J'examine successivement les divers systèmes d'équations qu'on peut former, j'en donne la résolution ; je développe les calculs principaux avec beaucoup d'étendue, et en général avec plus de précision qu'il n'est nécessaire dans les applications ordinaires ; mais elles étant données pour exemple, et devant faire juger du degré d'exactitude de la méthode, on ne pouvoit y mettre trop de soin. Les résultats, au surplus, en sont très-satisfaisans, et on verra que par cette méthode il est possible de déduire de trois observations données d'une comète, dans un assez petit espace de temps, des valeurs fort approchées des vrais élémens de son orbite.

Cependant la connoissance de la véritable orbite ne sera

et qu'on fait abstraction de l'action réciproque entre la terre et la comète.

III. Cela posé, soient encore m, n, p, r, les valeurs respectives de x, y, z, v, et M, N, R, celles de X, Y, V, lorsque $t = 0$. Si on suppose qu'à compter de l'époque où $t = 0$, les intervalles de temps ne soient pas trop considérables en deçà et au-delà de cette époque; les coordonnées, tant de la comète que de la terre, seront déterminées avec une exactitude suffisante par les équations suivantes, où l'on a omis seulement les termes affectés de t^4 et des puissances supérieures de t.

$$x = m + m't + m''t^2 + m'''t^3$$
$$y = n + n't + n''t^2 + n'''t^3$$
$$z = p + p't + p''t^2 + p'''t^3$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{M} + \mathrm{M}'t + \mathrm{M}''t^2 + \mathrm{M}'''t^3$$
$$\mathrm{Y} = \mathrm{N} + \mathrm{N}'t + \mathrm{N}''t^2 + \mathrm{N}'''t^3$$

Ces valeurs doivent être substituées dans les équations (1), afin de réduire au plus petit nombre les coëfficiens indéterminés, et comme on a

$$v^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \begin{cases} m^2 + n^2 + p^2 \\ + 2t(mm' + nn' + pp') + \&c. \end{cases}$$

si on fait pour abréger

$$k = mm' + nn' + pp',$$
$$\mathrm{K} = \mathrm{MM}' + \mathrm{NN}',$$

on aura

$$v^2 = r^2 + 2kt + \&c., \quad \mathrm{V}^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{K}t + \&c.;$$

d'où résulte

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3kt}{r^4} + \&c., \quad \frac{1}{\mathrm{V}^3} = \frac{1}{\mathrm{R}^3} - \frac{3\mathrm{K}t}{\mathrm{R}^4} + \&c.$$

R^5 r^5

Et la substitution faite dans l'équation différentielle en x donnera

$$m'' = -\frac{m}{2r^3}; \quad m''' = \frac{mk}{2r^5} - \frac{m'}{6r^3}.$$

On obtiendra un semblable résultat des autres équations différentielles, ce qui donnera

$$x = m\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + m'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)$$

$$y = n\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + n'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)$$

$$z = p\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + p'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right) \qquad (2)$$

$$X = M\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) + M'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)$$

$$Y = N\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) + N'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)$$

IV. Au moyen de ces coordonnées, on peut déterminer la longitude α de la comète et sa latitude $\mathcal{C}$, par les équations :

$$\tan \alpha = \frac{y - Y}{x - X}, \quad \frac{\tan \mathcal{C}}{\cos \alpha} = \frac{z}{x - X}.$$

De sorte qu'en général, pour un temps quelconque t qui n'excédera pas certaines limites avant ou après l'époque choisie, on aura les deux équations :

$$\left.\begin{array}{l} n\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) \\ -N\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) \\ +n'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right) \\ -N'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right) \end{array}\right\} = \tan \alpha \left\{\begin{array}{l} m\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) \\ -M\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) \\ +m'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right) \\ -M'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right) \end{array}\right.$$

(3)

$$p\left(1-\frac{t^2}{2r^3}+\frac{kt^3}{2r^5}\right) + p'\left(t-\frac{t^3}{6r^3}\right) = \frac{\tang\,\varsigma}{\cos\alpha}\left\{\begin{aligned} & m\left(1-\frac{t^2}{2r^3}+\frac{kt^3}{2r^5}\right)\\ & -M\left(1-\frac{t^2}{2R^3}+\frac{Kt^3}{2R^5}\right)\\ & +m'\left(t-\frac{t^3}{6r^3}\right)\\ & -M'\left(t-\frac{t^3}{6R^3}\right)\end{aligned}\right.$$

V. Soit pour abréger:

$$\begin{aligned} m &= M+\mu, & m' &= M'+\mu' \\ n &= N+\nu, & n' &= N'+\nu'; \end{aligned} \qquad (4)$$

et de plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3} &= \omega \\ \frac{k}{r^5}-\frac{K}{R^5} &= \zeta. \end{aligned} \qquad (5)$$

Si on multiplie les équations (3) par $1+\frac{t^2}{2r^3}-\frac{kt^3}{2r^5}$, et qu'on néglige toujours les t^4, elles deviendront:

$$\left.\begin{aligned} & \nu+\nu't\left(1+\frac{t^2}{3r^3}\right)\\ & -\tfrac{1}{2}N(\omega t^2-\zeta t^3)\\ & -\tfrac{1}{6}N'\omega t^3\end{aligned}\right\} = \tang\,\alpha\left\{\begin{aligned} & \mu+\mu't\left(1+\frac{t^2}{3r^3}\right)\\ & -\tfrac{1}{2}M(\omega t^2-\zeta t^3)\\ & -\tfrac{1}{6}M'\omega t^3\end{aligned}\right.$$

(6)

$$p+p't\left(1+\frac{t^2}{3r^3}\right) = \frac{\tang\,\varsigma}{\cos\alpha}\left\{\begin{aligned} & \mu+\mu't\left(1+\frac{t^2}{3r^3}\right)\\ & -\tfrac{1}{2}M(\omega t^2-\zeta t^3)\\ & -\tfrac{1}{6}M'\omega t^3\end{aligned}\right.$$

On peut simplifier encore ces équations en omettant le facteur $1+\frac{t^2}{3r^3}$ qui multiplie μ', ν', p'; car la suite du calcul prouvera que l'omission peut être faite sans qu'il en résulte d'erreur dans les termes qu'on doit conserver.

VI. Supposons maintenant que les trois observations données de la comète répondent successivement aux temps :

$$-\theta, \quad o, \quad +\theta',$$

en sorte que l'époque $t = o$ réponde à l'observation moyenne. Soient

les longitudes observées a^o, a, a',
et les latitudes .... b^o, b, b'.

Faisons de plus, pour abréger,

$$\begin{aligned} &tang\, a^o = f^o, \quad tang\, a = f, \quad tang\, a' = f' \\ &\frac{tang\, b^o}{cos\, a^o} = g^o, \quad \frac{tang\, b}{cos\, a} = g, \quad \frac{tang\, b'}{cos\, a'} = g'. \end{aligned} \quad (7)$$

Si dans les équations (6) on fait successivement $t = o$, $t = -\theta$, $t = \theta'$, on aura les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &v = f\mu \\ &\left.\begin{aligned} &v - \theta v' - \tfrac{1}{2}N\omega\theta^2 \\ &- \tfrac{1}{2}N\zeta\theta^3 + \tfrac{1}{6}N'\omega\theta^3 \end{aligned}\right\} = f^o \left\{\begin{aligned} &\mu - \theta\mu' - \tfrac{1}{2}M\omega\theta^2 \\ &- \tfrac{1}{2}M\zeta\theta^3 + \tfrac{1}{6}M'\omega\theta^3 \end{aligned}\right. \\ &\left.\begin{aligned} &v + \theta' v' - \tfrac{1}{2}N\omega\theta'^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}N\zeta\theta'^3 - \tfrac{1}{6}N'\omega\theta'^3 \end{aligned}\right\} = f' \left\{\begin{aligned} &\mu + \theta'\mu' - \tfrac{1}{2}M\omega\theta'^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}M\zeta\theta'^3 - \tfrac{1}{6}M'\omega\theta'^3 \end{aligned}\right. \\ &p = g\mu \\ &p - \theta p' = g^o \left\{\begin{aligned} &\mu - \theta\mu' - \tfrac{1}{2}M\omega\theta^2 \\ &- \tfrac{1}{2}M\zeta\theta^3 + \tfrac{1}{6}M'\omega\theta^3 \end{aligned}\right. \\ &p + \theta' p' = g' \left\{\begin{aligned} &\mu + \theta'\mu' - \tfrac{1}{2}M\omega\theta'^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}M\zeta\theta'^3 - \tfrac{1}{6}M'\omega\theta'^3. \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

VII. Après la substitution qui se fait immédiatement des valeurs de v et de p, ces six équations se réduiront à quatre contenant les quatre inconnues μ, μ', v', p', sous forme linéaire. Il faut d'abord s'occuper de la résolution de ces quatre équations.

Dans le cas présent, où les équations (8) ne sont exactes

qu'aux quantités près de l'ordre θ^4, il faudra omettre, dans le calcul de l'élimination, tous les termes qui seroient de cet ordre ou d'un ordre supérieur; attention qui contribuera à simplifier les résultats. On pourroit aussi établir les formes des diverses inconnues μ, μ', ν, p', en les représentant chacune par $A + B\theta + C\theta' + D\theta^2 + E\theta\theta' + F\theta'^2 +$ &c.; on reconnoîtroit bientôt par la substitution, que ces quatre inconnues ne contiennent aucun terme constant indépendant de θ et θ'; que la quantité μ en particulier, ne contient pas même les termes du premier degré, et qu'elle doit être divisible par $\theta\theta'$, de sorte qu'on doit faire $\mu = A\theta\theta' + B\theta^2\theta' + C\theta\theta'^2$. On trouvera pareillement que les trois autres inconnues doivent être de la forme $A\theta + B\theta' + C\theta^2 + D\theta\theta' + E\theta'^2$, sans aller au-delà, afin de ne pas introduire dans les équations (8) des termes du quatrième ordre; et cette forme justifie l'omission que nous avons faite du facteur $1 + \frac{t^2}{3r^3}$ dans les équations (6). On pourroit donc par les coëfficiens indéterminés, effectuer la résolution des équations (8); mais on y parviendra aussi facilement par les moyens ordinaires, et voici le résultat de ce calcul présenté sous la forme la plus simple dont il paroît susceptible.

VIII. Soit pour abréger,

$$\Delta = (f'g - fg') + (f^\circ g' - f'g^\circ) + (fg^\circ - f^\circ g). \quad (9)$$

Cette quantité qui se présente d'abord dans le résultat de l'élimination mérite une attention particulière : elle peut se mettre sous la forme

$$(f' - f)(g' - g^\circ) - (f' - f^\circ)(g' - g),$$

et alors on voit aisément qu'elle est de l'ordre $\theta\theta'(\theta + \theta')$, c'est-à-dire du troisième ordre, et cette extrême petitesse empêche le plus souvent qu'elle ne soit déterminée assez exactement par les données de l'observation. Soit de plus,

$$M\,(f'g - fg') + N\,(g' - g) = B^{\circ}$$
$$M\,(f^{\circ}g' - f'g^{\circ}) + N\,(g^{\circ} - g') = B$$
$$M\,(fg^{\circ} - f^{\circ}g) + N\,(g - g^{\circ}) = B'$$

$$M'\,(f'g - fg') + N'\,(g' - g) = E^{\circ}$$
$$M'\,(f^{\circ}g' - f'g^{\circ}) + N'\,(g^{\circ} - g') = E$$
$$M'\,(fg^{\circ} - f^{\circ}g) + N'\,(g - g^{\circ}) = E'\,;$$

quantités entre lesquelles on a les relations

$$\begin{array}{ll} B^{\circ} + B + B' = M\Delta & E^{\circ} + E + E' = M'\Delta \\ f^{\circ}B^{\circ} + fB + f'B' = N\Delta & f^{\circ}E^{\circ} + fE + f'E' = N'\Delta \\ g^{\circ}B^{\circ} + gB + g'B' = 0 & g^{\circ}E^{\circ} + gE + g'E' = 0\,; \end{array} \quad (10)$$

les valeurs réduites de nos quatre inconnues seront :

$$\mu = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,\theta\theta' B + \frac{\omega\,(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,\theta\theta' E \quad (11)$$

$$\mu' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta B^{\circ} - \theta' B') + \frac{\omega\,(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,(\theta E^{\circ} - \theta' E')$$
$$+ \frac{M}{2}\,\omega(\theta' - \theta) + (\tfrac{1}{6}M'\omega - \tfrac{1}{2}M\zeta)\,(\theta^2 - \theta\theta' + \theta'^2)$$

$$\nu' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta f^{\circ} B^{\circ} - \theta' f' B') + \frac{\omega\,(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,(\theta f^{\circ} E^{\circ} - \theta' f' E')$$
$$+ \frac{N}{2}\,\omega(\theta' - \theta) + (\tfrac{1}{6}N'\omega - \tfrac{1}{2}N\zeta)\,(\theta^2 - \theta\theta' + \theta'^2)$$

$$p' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta g^{\circ} B^{\circ} - \theta' g' B') + \frac{\omega\,(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,(\theta g^{\circ} E^{\circ} - \theta' g' E').$$

IX. Avec ces valeurs, on calculera celles des six coëfficiens m, n, p, m', n', p'; ce qui se fera par les équations

$$\begin{array}{ll} m = \mu + M & m' = \mu' + M' \\ n = f\mu + N & n' = \nu' + N' \\ p = g\mu & p' = p' \end{array} \quad (12)$$

et ces six valeurs ne contiendront que les deux inconnues

ζ et ω sous forme linéaire. Calculant ensuite la valeur de k par la formule

$$k = mm' + nn' + pp', \qquad (13)$$

et substituant cette valeur ainsi que celle de $\omega = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$, dans l'équation

$$\zeta = \frac{k}{r^3} - \frac{K}{R^3}, \qquad (14)$$

on aura une première équation entre les quantités ζ et r, dans laquelle ζ ne montera qu'au second degré.

Enfin on a de plus les deux équations

$$m^2 + n^2 + p^2 = r^2 \qquad (15)$$

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \qquad (16)$$

dans lesquelles il faudra faire de semblables substitutions pour obtenir les équations finales auxquelles se réduit la solution du problême.

L'équation (16) appartient à une orbite elliptique dont le demi-grand axe $= a$; mais comme on suppose ordinairement que l'orbite des comètes est parabolique, on pourra faire $\frac{1}{a} = 0$, ce qui donnera une équation de plus que d'inconnues. Et cette circonstance pourra offrir diverses combinaisons dont on profitera pour rendre moins difficile la détermination des inconnues r et ζ.

Nous donnerons ci-après le moyen de vaincre ces difficultés et de parvenir à des résultats dont la pratique puisse s'accommoder. Mais avant tout, nous examinerons, avec tout le détail nécessaire, le cas où l'on a $\theta' = \theta$; c'est-à-dire où les trois observations sont faites à des intervalles de temps égaux. Cette condition apporte dans les calculs une grande simplification, et on peut toujours y satisfaire, en interpolant les observations faites à peu de distance les unes des autres.

X. Soit donc $\theta' = \theta$, et les formules (11) se réduiront aux suivantes :

$$\mu = \frac{\omega\,\theta^2}{2\Delta} B$$

$$\mu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta} (B^\circ - B') + (\tfrac{1}{6} M'\omega - \tfrac{1}{2} M\zeta)\,\theta^2$$

$$\nu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta} (f^\circ B^\circ - f' B') + (\tfrac{1}{6} N'\omega - \tfrac{1}{2} N\zeta)\,\theta^2$$

$$p' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta} (g^\circ B^\circ - g' B').$$

Or j'observe qu'on peut omettre les termes affectés de θ^2 dans les valeurs de μ' et ν'. En effet, dans les équations (6) on a négligé, par rapport à μ', la partie $\frac{\mu'\,\theta^2}{3r^3}$, parce que le premier terme de μ' étant de la forme $A\,\theta$, cette partie seroit devenue $\frac{A\,\theta^3}{3r^3}$; et multipliée par θ, comme l'est μ' dans les équations (6), elle seroit montée au quatrième degré; ainsi elle a dû être exclue des équations (6) qui ne contiennent pas les termes affectés de t^4 ou θ^4. D'un autre côté cependant, en considérant θ comme très-petit, le coëfficient A qui affecte θ doit être très-grand, afin que $A\,\theta$ ait la valeur finie qui convient à la quantité μ'; de sorte que $A\,\theta^3$ désigne réellement une quantité de l'ordre θ^2. Ainsi en conservant dans les formules précédentes les termes affectés de θ^2, qui ne peuvent être beaucoup augmentés par leurs coëfficiens, on n'ajoute pas à l'exactitude de ces formules dans lesquelles des quantités du même ordre ont été omises. Donc il faut supprimer entièrement ces termes, et on aura les valeurs très-simples :

$$\mu = \frac{\omega\,\theta^2}{2\Delta} B$$

$$\mu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta} (B^\circ - B') \qquad (17)$$

$$r' = \frac{\omega\theta}{2\Delta}(f^{\circ}B^{\circ} - f'B')$$

$$p' = \frac{\omega\theta}{2\Delta}(g^{\circ}B^{\circ} - g'B')$$

dans lesquelles l'inconnue ζ ne se retrouve plus.

XI. Avant d'aller plus loin, il convient de déterminer les quantités M, N, M', N', qui dépendent du mouvement de la terre. Et d'abord, si on appelle A la longitude de la terre, ou celle du soleil augmentée de 180°, au moment de la seconde observation, on aura

$$M = R\cos A\ ,\quad N = R\sin A.$$

Appelons encore pour un temps quelconque t:

ϵ l'excentricité de l'orbite terrestre,
Φ la longitude héliocentrique de la terre,
γ la longitude de l'aphélie,
V ou R le rayon vecteur,

on aura par les propriétés du mouvement elliptique et en regardant γ comme constant,

$$\frac{1-\epsilon^2}{R} = 1 - \epsilon\cos(\Phi - \gamma)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}{R^2}\ ,\quad \frac{dR}{dt} = -\frac{\epsilon\sin(\Phi-\gamma)}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}. \qquad (18)$$

Or on a $X = R\cos\Phi$, $Y = R\sin\Phi$; de-là on déduira les valeurs de $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dY}{dt}$, lesquelles en faisant $t = 0$ ou $\Phi = A$, deviendront celles des coëfficiens M' et N' : on aura donc

$$M' = \frac{-\sin A + \epsilon\sin\gamma}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}\ ,\quad N' = \frac{\cos A - \epsilon\cos\gamma}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}.$$

XII. Si au lieu de la constante γ on introduit l'anomalie

vraie $\Psi = A - \gamma$, ce qui donne $\gamma = A - \Psi$; on aura, en développant ces expressions jusqu'aux ϵ^2 inclusivement,

$$M' = -\sin A\,(1 - \epsilon\cos\Psi + \tfrac{1}{2}\epsilon^2) - \epsilon\cos A\sin\Psi$$
$$N' = \cos A\,(1 - \epsilon\cos\Psi + \tfrac{1}{2}\epsilon^2) - \epsilon\sin A\sin\Psi.$$

Par un semblable développement on a

$$R = 1 + \epsilon\cos\Psi - \epsilon^2\sin^2\Psi$$
$$\frac{1}{R} = 1 - \epsilon\cos\Psi + \epsilon^2; \qquad (19)$$

De sorte qu'on peut écrire ainsi les valeurs de M' et N',

$$M' = -\sin A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right) - \epsilon\sin\Psi\cos A$$
$$N' = +\cos A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right) - \epsilon\sin\Psi\sin A; \qquad (20)$$

d'où résulte

$$M'^2 + N'^2 = \frac{2}{R} - 1$$
$$MM' + NN' = -\epsilon\sin\Psi . R. \qquad (21)$$

On conserve dans ces expressions le quarré ϵ^2 de l'excentricité, quoique ce terme soit très-petit, parce qu'il ne complique presque pas le calcul, et que si on l'omettoit entièrement, la valeur de R se réduiroit à $1 + \epsilon\cos\Psi$, et ne correspondroit plus assez exactement au logarithme donné par les éphémérides. On peut supposer pour les temps voisins de celui-ci, $\epsilon = 0{,}01679$, alors on a $\epsilon^2 = 0.0002819$, et

$$\log\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right) = \log\frac{1}{R} - 0.0000612,$$

A l'égard du terme $\epsilon\sin\Psi$, on le calculera en prenant dans les tables le lieu de l'aphélie γ qui est très-peu variable, d'où l'on conclura l'anomalie $\Psi = A - \gamma$. On peut encore déterminer la quantité $\epsilon\sin\Psi$ avec une précision suffisante par la seule valeur connue du logarithme de R; car tirant de ce

logarithme le nombre $\frac{1}{R} = 1 + u$, on aura $\epsilon \cos \Psi = \epsilon^2 - u$, et de-là

$$\epsilon \sin \Psi = \pm \sqrt{[(\epsilon + \epsilon^2 - u)(\epsilon - \epsilon^2 + u)]}. \qquad (22)$$

Quant au signe de cette quantité, il sera positif depuis le premier juillet jusqu'au premier janvier, et négatif dans les six autres mois.

Enfin on peut encore observer que les quantités $\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}$ et $\epsilon \sin \Psi$, qui entreront comme coëfficiens dans nos formules, sont liées entr'elles par cette relation :

$$\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R}\right)^2 + \epsilon^2 \sin^2 \Psi = \frac{2}{R} - 1.$$

XIII. Il s'agit maintenant de former les coëfficiens des équations à résoudre, de la manière la plus simple et la plus commode pour la pratique. Pour cela, il convient de remettre à la place de f, g, f°, g°, &c., leurs valeurs en a, b, a°, b°, &c. données immédiates des observations. Cette substitution étant faite d'abord dans la quantité Δ, on prendra pour abréger,

$$\begin{aligned} D = {} & \operatorname{tang} b' \sin(a - a^\circ) + \operatorname{tang} b^\circ \sin(a' - a) \\ & + \operatorname{tang} b \sin(a^\circ - a'), \end{aligned} \qquad (23)$$

et on aura $\Delta = \frac{-D}{\cos a^\circ \cos a \cos a'}$. Faisant ensuite les mêmes substitutions et celles de $M = R \cos A$, $N = R \sin A$, dans les valeurs de B°, B, B', on aura

$$\begin{aligned} \frac{B}{\Delta} &= \frac{R \cos a}{D} [\operatorname{tang} b' \sin(A - a^\circ) - \operatorname{tang} b^\circ \sin(A - a')] \\ \frac{B'}{\Delta} &= \frac{R \cos a'}{D} [\operatorname{tang} b^\circ \sin(A - a) - \operatorname{tang} b \sin(A - a^\circ)] \qquad (24) \\ \frac{B^\circ}{\Delta} &= \frac{R \cos a^\circ}{D} [\operatorname{tang} b \sin(A - a') - \operatorname{tang} b' \sin(A - a)]. \end{aligned}$$

Soit encore pour abréger,

$$C = tang\, b' \sin (A - a^{\circ}) - tang\, b^{\circ} \sin (A - a'), \qquad (25)$$

la première des équations (17) donnera $\mu = \frac{R\omega\theta^2}{2D} C \cos a$; or par les triangles rectangles TCK, TKG (fig. 1), on a $TK = \rho \cos b$, et TG ou $\mu = \rho \cos b \cos a$; donc en introduisant ρ à la place de μ, on aura

$$\rho = \frac{R\omega\theta^2 C}{2D \cos b} = \frac{R\theta^2 C}{2D \cos b}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right). \qquad (26)$$

Substituant de même l'expression de μ en ρ, dans les valeurs de m, n, p, des équations (12), on aura

$$\begin{aligned} m &= \rho \cos a \cos b + R \cos A \\ n &= \rho \sin a \cos b + R \sin A \\ p &= \rho \sin b, \end{aligned} \qquad (27)$$

et l'équation $m^2 + n^2 + p^2 = r^2$ deviendra

$$r^2 = R^2 + 2R\rho \cos b \cos (A - a) + \rho^2.$$

Cette équation seroit donnée immédiatement par le triangle CST; car en appelant c l'angle entre le soleil et la comète, les côtés compris sont R et ρ, et le côté opposé r, ce qui donne

$$r^2 = R^2 - 2R\rho \cos c + \rho^2.$$

Or l'angle c a pour mesure l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont les côtés sont b et $180° - A + a$, on a donc $\cos c = -\cos b \cos (A - a)$.

XIV. Les coëfficiens C et D se déduisent immédiatement des données du problême par les formules (23) et (25); si ensuite on fait

$$\cos c = -\cos b \cos (A - a), \quad h = \frac{R\theta^2 C}{2D \cos b}, \qquad (28)$$

on aura les deux équations

$$\begin{aligned} \rho &= h\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ r^2 &= R^2 - \rho (2R \cos c) + \rho^2, \end{aligned} \qquad (29)$$

dans lesquelles il n'y a d'inconnues que les deux côtés r et ρ du triangle SCT.

Si on élimine ρ de ces deux équations, on aura une équation en r du huitième degré, mais qui sera divisible par $r - \mathrm{R}$, et s'abaissera immédiatement au septième. C'est le résultat auquel sont parvenus tous ceux qui ont traité avec succès le problême des comètes ; et ce résultat est d'autant plus remarquable, que les équations (29) se déduisent assez facilement des données de l'observation, et qu'elles ont lieu sans supposer que l'orbite de la comète soit une parabole.

XV. Comme les quantités r et ρ sont essentiellement positives, il n'y aura d'admissibles, parmi les diverses solutions des équations (29), que celles qui donneront r et ρ positives. Or en construisant les deux courbes de genre hyperbolique qui représentent ces équations, et examinant les diverses intersections dont elles sont susceptibles, on parvient à cette conclusion générale sur le nombre de solutions utiles que ces équations comportent :

Si $3h \cos c$ *est positif et plus grand que* R^4, *les équations* (29) *admettront une solution et n'en admettront qu'une ; dans les autres cas, ces équations auront deux solutions ou n'en auront aucune.*

XVI. A l'inspection de l'équation $\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}\right)$, on voit que le signe h doit être le même que celui de $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\mathrm{R}^3}$. Donc si h est positive, on aura $r < \mathrm{R}$, c'est-à-dire que la comète sera moins éloignée du soleil que n'est la terre. Au contraire, si h est négatif, on aura $r > \mathrm{R}$. Dans le cas où l'on auroit $\mathrm{D} = 0$, h seroit infini et on auroit $r = \mathrm{R}$, c'est-à dire que la comète et la terre seroient à égale distance du soleil. Ce cas est, d'après la remarque de Lambert, celui où les trois lieux

apparens de la comète seroient situés dans le plan d'un même grand cercle; car pour que trois points dont les longitudes sont a°, a, a', et les latitudes b°, b, b', respectivement, soient situés dans le plan d'un même grand cercle, il faut qu'on ait l'équation

$$0 = \tang b' \sin(a - a^{\circ}) + \tang b^{\circ} \sin(a' - a) + \tang b \sin(a^{\circ} - a').$$

Donc lorsqu'on aura $D = 0$, ou seulement D très-petit, on pourra en conclure, ou exactement, ou au moins par approximation,

$$r = R \text{ et } \rho = 2R \cos c.$$

XVII. C'est une circonstance peu favorable que celle où l'on tombe sur des valeurs de D très-petites; car alors une erreur très-possible d'une ou de deux minutes sur quelqu'une des quantités données par l'observation, pourroit changer dans une proportion notable la valeur de D, ou même lui donner un signe contraire à celui qu'elle doit avoir. Dans ce cas, il n'y a aucune conclusion certaine à tirer des équations (29), sinon qu'on a à-peu-près $r = R$ et $\rho = 2R \cos c$; on se dispensera donc alors de chercher les racines de ces équations, et on aura recours aux autres équations qui seront données ci-après.

XVIII. Dans les autres cas, la résolution des équations (29) s'effectuera assez facilement par les fausses positions; mais pour cela il est bon de connoître d'avance les limites de r et de ρ.

Lorsque h est positif on a $r < R$; mais la seconde des équations (29) donne $r^2 = R^2 \sin^2 c + (\rho - R \cos c)^2$; donc on a en même temps $r > R \sin c$. Ces deux limites auxquelles on peut joindre celles de ρ, savoir $\rho > 0$ et $\rho < 2R \cos c$, sont suffisantes pour diriger le calcul et rendre la résolution assez prompte.

Si h est négatif et $\cos c$ positif, soit $h = -i$; ayant déjà $r > R$, on doit avoir par conséquent $\rho > 2R \cos c$; mais de l'équation $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{\rho}{i}$, on tire $\rho < \frac{i}{R^3}$; donc on aura

$r < \sqrt{\left(R^2 - \frac{2Ri\cos c}{R^3} + \frac{i^2}{R^6}\right)}$. Il faut observer que si on n'avoit pas $i > 2R^4 \cos c$, les deux limites de ρ seroient incompatibles, et il n'y auroit pas de solution.

Enfin si h est négatif, ainsi que $\cos c$; soit $h = -i$, et $\cos c = -l$, on aura toujours $\rho < \frac{i}{R^3}$, et l'autre limite sera simplement $\rho > o$: celles de r seront en même temps $r > R$, et $r < \sqrt{\left(R^2 + \frac{2Ril}{R^3} + \frac{i^2}{R^6}\right)}$.

XIX. Il faut maintenant faire la substitution des valeurs de m', n', p', dans l'équation (16) : or en vertu des formules (12), (17) et (24), on a

$$\left.\begin{aligned}
m' &= M' + \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned}&\cos a^\circ \operatorname{tang} b \sin(A - a') - \cos a^\circ \operatorname{tang} b' \sin(A - a)\\ &+ \cos a' \operatorname{tang} b \sin(A - a^\circ) - \cos a' \operatorname{tang} b^\circ \sin(A - a)\end{aligned}\right\}\\
n' &= N' + \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned}&\sin a^\circ \operatorname{tang} b \sin(A - a') - \sin a^\circ \operatorname{tang} b' \sin(A - a)\\ &+ \sin a' \operatorname{tang} b \sin(A - a^\circ) - \sin a' \operatorname{tang} b^\circ \sin(A - a)\end{aligned}\right\}\\
p' &= \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned}&\operatorname{tang} b^\circ \operatorname{tang} b \sin(A - a') - \operatorname{tang} b^\circ \operatorname{tang} b' \sin(A - a)\\ &+ \operatorname{tang} b' \operatorname{tang} b \sin(A - a^\circ) - \operatorname{tang} b' \operatorname{tang} b^\circ \sin(A - a)\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Appelons F, G, H les quantités qui multiplient $\frac{R\omega\theta}{2D}$ dans les valeurs de m', n', p' respectivement ; nous aurons en substituant aussi les valeurs de M' et N' :

$$m' = -\sin A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon \sin\Psi \cos A + \frac{R\omega\theta}{2D}F$$

$$n' = \cos A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon \sin\Psi \sin A + \frac{R\omega\theta}{2D}G;$$

d'où résulte

$$m'^2 + n'^2 = \frac{2}{R} - 1 - \frac{R\omega\theta}{D}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right)(F \sin A - G \cos A)$$
$$- \frac{R\omega\theta}{D} \cdot \varepsilon \sin \psi \, (F \cos A + G \sin A)$$
$$+ \frac{R^2\omega^2\theta^2}{4D^2}(F^2 + G^2).$$

Donc si pour abréger encore les expressions on fait

$$P = 2 \operatorname{tang} b \sin(A-a^\circ) \sin(A-a') - \operatorname{tang} b' \sin(A-a^\circ) \sin(A-a)$$
$$- \operatorname{tang} b^\circ \sin(A-a') \sin(A-a)$$
$$(31)$$
$$Q = \operatorname{tang} b \sin(2A - a^\circ - a') - \operatorname{tang} b' \cos(A-a^\circ) \sin(A-a)$$
$$- \operatorname{tang} b^\circ \cos(A-a') \sin(A-a)$$

$$H = -2 \operatorname{tang} b^\circ \operatorname{tang} b' \sin(A-a) + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} b^\circ \sin(A-a')$$
$$+ \operatorname{tang} b \operatorname{tang} b' \sin(A-a^\circ).$$

Les trois quantités m', n', p', pourront être mises sous cette forme :

$$m' = \sin A \left(\frac{R\omega\theta}{2D} P - \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{R}\right) + \cos A \left(\frac{R\omega\theta}{2D} Q - \varepsilon \sin \psi\right)$$

$$n' = -\cos A \left(\frac{R\omega\theta}{2D} P - \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{R}\right) + \sin A \left(\frac{R\omega\theta}{2D} Q - \varepsilon \sin \psi\right)$$

$$p' = \frac{R\omega\theta}{2D} H, \qquad (32)$$

et leur substitution dans l'équation (16) donnera

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{2}{R} - 1 - \frac{R\omega\theta}{D}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R} P + \varepsilon \sin \psi \, Q\right)$$
$$+ \frac{R^2\omega^2\theta^2}{4D^2}(P^2 + Q^2 + H^2). \qquad (33)$$

XX. Si l'on suppose que l'orbite est parabolique, on aura

3

$\frac{1}{a} = 0$, et l'équation précédente devra être combinée avec l'équation

$$\ldots = \frac{1}{R^3}; \qquad (34)$$

d'où l'on voit que le résultant ne sera que du sixième degré.

Cette équation aura toujours une racine réelle positive qu'on trouvera en faisant $a = x$, $\frac{1}{a} = y$, si on construit les deux paraboles qui ont pour équations

$$y = \frac{1}{R} - \frac{r}{2} - Ax + Bx^2$$

$$y^3 = x + \frac{1}{R^3}.$$

La première sera une parabole ordinaire, ayant son axe dirigé dans le sens des ordonnées. Cette courbe est située toute entière du côté des y positives, et ne coupe point la ligne des abscisses, parce que le second membre de l'équation (33) formé de la somme de trois quarrés, ne sauroit devenir nul et a ses facteurs imaginaires. D'ailleurs lorsque $x = 0$, l'ordonnée $y = \frac{1}{R} - \frac{r}{2}$, ou à peu-près $y = \frac{r}{2}$.

La seconde courbe est une parabole cubique dont une branche s'étend à l'infini dans l'angle des x et y positives, et l'autre dans l'angle des x et y négatives. Lorsque $x = 0$, l'ordonnée $y = \frac{1}{R}$, ou à peu-près $y = 1$; ainsi dans cette courbe, les ordonnées sont plus grandes vers l'origine des abscisses que celles de la première parabole. Mais comme à une grande distance de l'origine c'est le contraire qui a lieu, il s'ensuit qu'il y aura nécessairement une intersection; et il ne peut y en avoir qu'une, parce que la parabole ordinaire oppose sa convexité à

la ligne des abscisses, tandis que la parabole cubique lui oppose sa concavité (*voyez* fig. 4).

Le système des équations (33) et (34) est donc préférable à celui des équations (29), non-seulement parce que le degré de l'équation finale est moindre, mais encore parce que la solution de celle-là est toujours unique, et ne présente aucune ambiguïté.

Il faut observer néanmoins que l'équation (33) est sujette au même inconvénient que la première des équations (29), dans le cas où D est très-petit, parce qu'alors les erreurs des observations ont une trop grande influence sur la valeur de D; et qu'ainsi la résolution des équations (33) et (34) pourroit conduire à des résultats défectueux.

XXI. Pour obvier à cet inconvénient, il faut éviter tout emploi du coëfficient D, et on en a heureusement la facilité, puisque le problême des comètes, dans la supposition d'une orbite parabolique, offre une équation de plus que d'inconnues.

Par l'équation (26), on a $\frac{R\,a\,\theta}{2D} = \frac{\rho \cos b}{\theta C}$ et cette valeur étant substituée dans l'équation (33), on aura, en suivant toujours l'hypothèse parabolique, c'est-à-dire en faisant $\frac{1}{a} = 0$,

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} + \frac{2\rho \cos b}{\theta C}\left(\frac{1 - \frac{1}{2}s^2}{R}P + s \sin \psi . Q\right) + \frac{\rho^2 \cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2); \qquad (35)$$

équation qui devra être combinée avec l'équation

$$r^2 = R^2 - \rho(2R \cos c) + \rho^2, \qquad (36)$$

afin d'en tirer les valeurs de r et ρ.

Si on éliminoit r ou ρ de ces deux équations, l'équation finale ne monteroit encore qu'au sixième degré. D'ailleurs les coëfficiens de ces équations se déduisent, avec une exactitude

suffisante, des données de l'observation. Le coefficient C qui sert de diviseur, est celui qu'on connoîtra avec le plus de précision ; car en regardant θ comme une quantité du premier ordre, C est du premier ordre aussi, et les trois autres F, G, H du second. Il paroît donc que la combinaison des équations (35) et (36) réunit tous les avantages qu'on peut desirer dans la solution du problême des comètes, et c'est à cette combinaison qu'il convient de s'arrêter définitivement.

XXII. On peut prouver encore que les équations (35) et (36) auront toujours une solution en nombres positifs.

En effet, si on décrit les deux courbes qui répondent à ces équations, en prenant ϱ pour l'abscisse et r pour l'ordonnée, le lieu de l'équation (36) sera une hyperbole équilatère dont le centre est sur la ligne des abscisses à la distance R cos a, et dont le demi-axe, dirigé suivant les ordonnées = R sin a (voyez fig. 5).

L'équation (34), qu'on pourroit réduire à la forme $y(x^2+a^2)=a^2b$, appartient à une courbe qui, comme la conchoïde supérieure, a pour asymptote la ligne des abscisses, et est située toute entière d'un même côté de cette ligne, sa plus grande ordonnée étant b. Lorsque $x=0$, l'ordonnée de l'hyperbole équilatère = R, celle de la seconde courbe $= \frac{2R}{2-R} = 2R$ à peu près; donc puisque la première s'éloigne à l'infini de l'axe, tandis que l'autre s'en rapproche de plus en plus à mesure que l'abscisse est plus grande, il s'ensuit que les deux courbes auront nécessairement une intersection dans le sens des abscisses positives et n'en auront qu'une. Ainsi la résolution des équations (35) et (36) aura encore l'avantage d'être toujours possible et de n'offrir aucune ambiguité.

Pour avoir les limites de r, il faut observer que les seconds membres des équations (35) et (36) ne peuvent se réduire à zéro, et qu'ils ont tous deux un *minimum*. Le *minimum* de r,

dans l'équation (36), est $R \sin C$. Soit Z le *minimum* du second membre de l'équation (35), et il est clair qu'on aura à la fois $r > R \sin C$, et $x < \frac{r}{Z}$. Au moyen de ces limites, il sera toujours assez facile de résoudre les équations dont il s'agit par les fausses positions.

XXIII. L'application de nos formules exige que le temps θ, donné en jours et fractions de jour, temps moyen, soit converti en arc du moyen mouvement du soleil, cet arc étant lui-même réduit en parties du rayon 1. Pour faire cette double réduction, il suffira de multiplier θ par $\frac{2\pi}{365.25638}$, c'est-à-dire qu'il faudra ajouter au logarithme de θ, compté en jours du temps moyen, le logarithme constant 8.2355821.

En faisant abstraction des erreurs des observations, les coefficiens qui entrent dans l'équation (35) ne doivent être censés exacts qu'aux quantités près de l'ordre θ^3; d'où l'on voit qu'il faut choisir trois observations faites dans un intervalle de temps peu considérable, et qui n'excède pas quinze à vingt jours. Mais il ne faut pas non plus que les observations soient trop rapprochées, parce qu'alors le mouvement géocentrique de la comète seroit trop petit, et les erreurs des observations auroient une trop grande influence sur les résultats.

XXIV. Après avoir résolu les équations (35) et (36) qui feront connoître les quantités r et ρ, il reste à déterminer les élémens de l'orbite; mais comme ces élémens, tels qu'ils résultent d'une première approximation, ne peuvent pas être fort exacts, et qu'il y aura toujours lieu à les corriger par le moyen d'observations plus éloignées entr'elles, on pourra se borner le plus souvent à chercher une valeur approchée de la distance périhélie, et de l'instant du passage au périhélie; car avec la connoissance approchée de ces deux élémens, on est en état de

procéder au calcul nécessaire pour obtenir une orbite corrigée.

Or si on appelle Π la distance périhélie, et qu'on calcule k par la formule

$$k = mm + nn + pp;$$

comme cette quantité est égale à $\frac{r\,dr}{dt}$, si elle est négative, on saura que la comète s'approche de son périhélie; et si elle est positive, on saura qu'elle s'en éloigne. De plus, au moyen de k, on aura la distance périhélie

$$\Pi = r - \tfrac{1}{2} k^2. \qquad (37)$$

Cette distance étant connue, on déterminera l'anomalie vraie ψ de la comète au moment de la seconde observation, par la formule

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\Pi}{r}. \qquad (38)$$

Enfin l'anomalie étant connue, on cherchera dans la table des comètes le temps T qui répond à cette anomalie; faisant ensuite

$$t = \Pi^{\frac{3}{2}}\,T, \qquad (39)$$

on aura le temps t employé par la comète à parcourir l'anomalie ψ. Ce temps étant ajouté à l'époque de l'observation moyenne, si la comète avance vers son périhélie, ou en étant retranché, si elle s'en éloigne, donnera l'instant du passage au périhélie.

Tout se réduit donc à déterminer la quantité k, dont la grandeur et le signe sont également nécessaires à considérer. Or en substituant les valeurs données par les équations (32), on trouve

$$k = \rho \cos b \sin(A - a)\left(\frac{\rho \cos b}{\theta C} P - \frac{(1 - \tfrac{1}{2} s^2)}{R}\right) + \rho \sin b \,.\, \frac{\rho \cos b}{\theta C} H$$
$$+ (R - r \cos c)\left(\frac{\rho \cos b}{\theta C} Q - s \sin \gamma\right). \qquad (40)$$

XXV. Mais si on veut déterminer à la fois tous les élémens de l'orbite, il sera inutile de chercher partiellement la valeur de k, et il faudra calculer les valeurs des six quantités m, n, p, m', n', p', par les équations (27) et (32).

Ces valeurs étant connues, on en déduira immédiatement celles des trois quantités $mn' - m'n$, $mp' - m'p$, $np' - n'p$. La première étant égale à $\frac{n^2}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$, fera connoître par son signe si le mouvement de la comète est direct ou s'il est rétrograde. Dans le premier cas, $mn' - m'n$ doit être positif, et dans le second il sera négatif.

Appelons maintenant I l'inclinaison de l'orbite, et S la longitude de celui des deux nœuds que la comète devance dans l'ordre des signes. On aura, par les propriétés du mouvement parabolique, les trois équations :

$$\left.\begin{aligned} mn' - m'n &= \pm \cos \mathrm{I} \sqrt{2\Pi} \\ mp' - m'p &= \pm \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{S} \sqrt{2\Pi} \\ np' - n'p &= \pm \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{S} \sqrt{2\Pi}. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Dans ces formules qui doivent toujours donner $\mathrm{I} < 90^\circ$ et $\sqrt{2\Pi}$ positif, il faut prendre les signes ambigus du second membre tous positivement, lorsque $mn' - m'n$ est positif, et tous négativement, lorsque $mn' - m'n$ est négatif.

La longitude S en particulier sera déterminée par la formule

$$\mathrm{tang}\, \mathrm{S} = \frac{np' - n'p}{mp' - m'p}. \quad (42)$$

Mais cette formule, qui convient également aux angles S et $180^\circ + \mathrm{S}$, donne la position de la ligne des nœuds, et n'indique pas l'un des nœuds plutôt que l'autre. On achèvera de déterminer S en calculant l'inclinaison I par la formule

$$\mathrm{tang}\, \mathrm{I} = \frac{mp' - m'p}{(mn' - m'n) \cos \mathrm{S}}; \quad (43)$$

et prenant des deux valeurs de S celle qui rend tang I positive.

Si $\cos$ S étoit très-petit, il seroit plus exact de déterminer $\tang$ I par la formule

$$\tang \mathrm{I} = \frac{np' - n'p}{(mn' - m'n) \sin \mathrm{S}}, \qquad (43)$$

et on leveroit toujours de la même manière l'indétermination de S.

Le nœud ainsi déterminé par la valeur de S, *sera le nœud ascendant, si le mouvement est direct et la latitude boréale, ou si le mouvement est rétrograde et la latitude australe. Dans les deux autres cas, ce sera le nœud descendant, et il faudra ajouter* 180° *à* S *pour avoir le lieu du nœud ascendant.*

Les angles S et I étant déterminés, on aura la distance périhélie Π par la formule

$$\Pi = \frac{(mn' - m'n)^2}{2 \cos^2 \mathrm{I}}; \qquad (44)$$

on pourroit aussi la trouver indépendamment de ces angles par la formule

$$2\Pi = (mn' - m'n)^2 + (mp' - m'p)^2 + (np' - n'p)^2, \qquad (45)$$

qui résulte évidemment des équations (41); et il est aisé de voir que cette dernière valeur s'accorde avec la formule (37). Car en général le produit $(m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)$ se décompose en ces quatre quarrés :

$$(mm' + nn' + pp')^2 + (mn' - m'n)^2 + (mp' - m'p)^2 + (np' - n'p)^2.$$

Donc la somme des trois derniers quarrés $= (m^2 + n^2 + p^2)$ $(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 = r^2 \cdot \frac{2}{r} - k^2 = 2r - k^2 = 2\Pi.$

XXVI. Avec la distance périhélie Π et le rayon vecteur r, on calculera l'anomalie vraie ψ de la comète au moment de la seconde observation, et de là l'instant du passage au périhélie, ainsi qu'on l'a expliqué dans l'art. XXIV.

Enfin pour avoir le lieu du périhélie, on calculera la longitude héliocentrique φ de la comète par la formule

$$\tang \varphi = \frac{n}{m}, \qquad (46)$$

ayant soin de choisir entre les deux angles φ et $\varphi + 180^\circ$ qui conviennent également à cette tangente, celui qui rend $\sin \varphi$ de même signe que n, ou $\cos \varphi$ de même signe que m.

φ étant ainsi connu, on trouvera toujours que $\varphi - S$ est positif et plus petit que 180°, conformément à la supposition faite que S est la longitude de celui des deux nœuds qui est moins avancé que la comète dans l'ordre des signes. Cela posé, soit σ la distance de la comète au nœud dont la longitude est S, on calculera σ par la formule

$$\tang \sigma = \frac{\tang(\varphi - S)}{\cos I}, \qquad (47)$$

et le lieu du périhélie sur l'orbite sera

$S + \sigma + \psi$ si la comète marche vers son périhélie,

ou $S + \sigma - \psi$ si elle y a déjà passé.

XXVII. Pour éviter la peine de chercher ailleurs la démonstration des formules (41), nous croyons devoir l'ajouter ici.

Des équations différentielles (1) on déduit immédiatement les intégrales suivantes, qui expriment que les aires décrites dans les diverses projections de l'orbite sont proportionnelles au temps

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= C\,dt \\ x\,dz - z\,dx &= C'\,dt \qquad (48) \\ y\,dz - z\,dy &= C''\,dt, \end{aligned}$$

on en tire d'abord l'équation

$$Cz - C'y + C''x = 0,$$

qui prouve que la trajectoire est située dans un même plan. En faisant $z = 0$, cette équation doit donner pour la ligne

des nœuds $\frac{y}{x} = tang\, S$; ainsi on aura $C''' = C''\, tang\, S$. Du rayon 1 décrivons dans le plan des x et y l'arc indéfini s dont l'origine soit sur l'axe des x; les coordonnées du plan qui répondent à l'extrémité de cet arc seront :

$$x = \cos s\,, \quad y = \sin s\,, \quad z = \frac{C''}{C'} \sin s - \frac{C'''}{C'} \cos s.$$

On aura donc aussi

$$dz = ds\left(\frac{C''}{C'} \cos s + \frac{C'''}{C'} \sin s\right);$$

et dans le cas où $s = S$, $\frac{dz}{ds}$ devient la tangente de l'inclinaison ou *tang* I : on a donc

$$tang\, I = \frac{C''}{C'} \cos S + \frac{C'''}{C'} \sin S = \frac{C''}{C' \cos S};$$

donc $C'' = C' \cos S\, tang\, I$ et $C''' = C' \sin S\, tang\, I$.

Cela posé, les équations (48) rapportées à l'époque où l'on a $x = m$, $y = n$, &c. deviennent

$$mn' - m'n = C'$$
$$mp' - m'p = C' \cos S\, tang\, I$$
$$np' - n'p = C' \sin S\, tang\, I,$$

et il ne reste à déterminer que C'. Or dans l'équation (16) qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

le premier membre $= \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$; multipliant de part et d'autre par r^2, et mettant à la place de $\frac{r\,dr}{dt}$ sa valeur k, on en déduit

$$\frac{r^4 d\varphi^2}{dt^2} = 2r - \frac{r^2}{a} - k^2.$$

Mais l'aire $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ est la projection sur le plan de l'écliptique, de l'aire $\frac{1}{2}r^2 d\varphi$ décrite dans le plan de l'orbite; donc puisque l'inclinaison mutuelle de ces deux plans est I, on a

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = \frac{x dy - y dx}{dt \cos I} = \frac{C}{\cos I}.$$

Donc

$$C^2 = \cos^2 I \left(2r - \frac{r^2}{a} - k^2\right).$$

Faisant à la fois $r = \Pi$ et $k = 0$, le second membre se réduit à $\cos^2 I \left(2\Pi - \frac{\Pi^2}{a}\right)$. Donc on a en général,

$$C' = \pm \cos I \sqrt{\left(2\Pi - \frac{\Pi^2}{a}\right)},$$

et en particulier, lorsque l'orbite est parabolique,

$$C' = \pm \cos I \sqrt{2\Pi};$$

ce qui donne les formules (41).

XXVIII. La solution que nous venons de développer pour le cas où les observations sont faites à des intervalles de temps égaux, paroît avoir toute l'exactitude et la simplicité qu'on peut desirer dans une question dont la difficulté est généralement reconnue. Si par des circonstances peu favorables cette solution ne conduit pas à des résultats suffisamment exacts, il faudra s'en prendre à l'imperfection des observations et non aux négligences que nous nous sommes permises dans la réduction des formules. En vain voudroit-on pousser plus loin l'exactitude de ces formules (ce qui ne pourroit se faire que par des calculs trop compliqués pour être de quelqu'utilité dans la pratique); les erreurs des observations domineroient toujours et empêcheroient les résultats de passer un certain degré d'approximation. D'ailleurs, on sait assez que trois observations prises à peu de distance les unes des autres, ne peuvent

pas déterminer exactement l'orbite d'une comète, et qu'il faut toujours recourir à des observations plus éloignées pour rectifier les élémens déterminés par une première approximation. Il est donc inutile de pousser le scrupule trop loin sur cette première approximation, et l'objet doit être suffisamment rempli par la méthode que nous avons exposée.

Lorsque les trois observations données ne seront pas également distantes entr'elles, il faudra, comme nous l'avons déjà dit, calculer par l'interpolation un nouveau lieu qui soit avec deux des autres dans la condition requise de l'égalité des distances. Dans ce calcul d'interpolation, il ne faudra faire entrer que les trois observations données, ou en général les trois observations connues les plus proches du moment pour lequel on veut déterminer le nouveau lieu. Tels sont les préceptes au moyen desquels on obtiendra toujours une solution suffisamment approchée dans la pratique.

XXIX. Mais à considérer le problême sous un point de vue purement analytique, nous n'aurions rempli qu'imparfaitement notre objet, si nous ne faisions voir par quels moyens on peut obtenir une solution générale indépendante de la supposition de $\theta' = \theta$.

Dans cette vue, nous allons reprendre les équations (11), et nous observerons d'abord que les mêmes raisons par lesquelles nous avons supprimé les termes affectés de [illegible] dans les formules de l'art. X, doivent également faire omettre, dans les valeurs de μ' et ν', les termes affectés du facteur [illegible]. Il ne reste alors, dans les équations (11) que deux sortes de termes, les uns affectés du facteur [illegible], les autres affectés du facteur $n(\theta' - \theta)$: or si on fait

(a) Ces trois dernières expressions se simplifient encore au moyen [illegible] le second facteur [illegible] pourra être représenté par [illegible] car la différence de ces deux quantités [illegible]

trouve de l'ordre des quantités que l'on a négligées. Il suit de là qu'on peut mettre les équations (11) sous cette forme :

$$\mu = \frac{\xi\theta\theta'}{2\Delta}[B + \tfrac{1}{3}(\theta' - \theta)E]$$

$$\mu' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta B^{\circ} - \theta' B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta E^{\circ} - \theta' E') + \frac{\xi}{6}(\theta' - \theta)M$$

$\frac{\xi(\theta'-\theta)}{6\Delta}$

$$\nu' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta f^{\circ}B^{\circ} - \theta' f'B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta f^{\circ}E^{\circ} - \theta' f'E') + \frac{\xi}{6\Delta}(\theta' - \theta)N$$

$\frac{\xi(\theta'-\theta)}{6\Delta}$

$$p' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta g^{\circ}B^{\circ} - \theta' g'B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta g^{\circ}E^{\circ} - \theta' g'E')$$

$\frac{\xi(\theta'-\theta)}{6\Delta}$

Soit $\theta' = x' + y'$ et $\theta = x' - y'$, ces équations deviendront :

$$\mu = \frac{\xi\theta\theta'}{2\Delta}(B + \tfrac{1}{3}y'E)$$

$$\mu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}[B^{\circ} - B' + \tfrac{1}{3}y'(E^{\circ} - E')] + \xi y' M$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}[B^{\circ} + B' + \tfrac{1}{3}y'(E^{\circ} + E')]$$

$$\nu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\{f^{\circ}B^{\circ} - f'B' + \tfrac{1}{3}y'(f^{\circ}E^{\circ} - f'E')\} + \xi y' N$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}[f^{\circ}B^{\circ} + f'B' + \tfrac{1}{3}y'(f^{\circ}E^{\circ} + f'E')]$$

$$p' = \frac{\xi x'}{2\Delta}[g^{\circ}B^{\circ} - g'B' + \tfrac{1}{3}y'(g^{\circ}E^{\circ} - g'E')]$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}[g^{\circ}B^{\circ} + g'B' + \tfrac{1}{3}y'(g^{\circ}E^{\circ} + g'E')]$$

Les trois dernières expressions se simplifient encore au moyen des valeurs de $B^{\circ} + B'$, $f^{\circ}B^{\circ} + f'B'$, etc. données par les équations (10) et (11) [illegible]

$$\mu = \frac{\xi x}{2\Delta}(B + \tfrac{2}{3}y'E)$$

$$\mu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}[B^\circ - B' + \tfrac{2}{3}y'(E^\circ - E')]$$

$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}(B + \tfrac{2}{3}y'E) + \tfrac{1}{2}\xi y'M$$

$$\nu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}[f^\circ B^\circ - f'B' + \tfrac{2}{3}y'(f^\circ E^\circ - f'E')]$$

$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}f(B + \tfrac{2}{3}y'E) + \tfrac{1}{2}\xi y'N$$

$$p' = \frac{\xi x'}{2\Delta}[g^\circ B^\circ - g'B' + \tfrac{2}{3}y'(g^\circ E^\circ - g'E')]$$

$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}g(B + \tfrac{2}{3}y'E).$$

XXX. Maintenant la substitution des valeurs de f, g, f', &c. en a, b, a', &c., donne, suivant les dénominations employées dans les art. XIII et XIX,

$$\frac{B}{\Delta} = R\cos a.\frac{C}{D}$$

$$\frac{B^\circ - B'}{\Delta} = R.\frac{F}{D}$$

$$\frac{f^\circ B^\circ - f'B'}{\Delta} = R.\frac{G}{D}$$

$$\frac{g^\circ B^\circ - g'B'}{\Delta} = R.\frac{H}{D}$$

A l'égard des autres quantités composées en E, comme celles-ci le sont en B, il faut observer que E n'est autre chose que B dans lequel on met M' et N' à la place de M et N. Or en négligeant l'excentricité ϵ (ce qui peut se faire sans inconvénient, parce que tous les termes affectés de E sont multipliés par la quantité très-petite y'), on a $M' = \sin A$ et $N' = \cos A$,

ou encore, par la même raison, $M' = -R \sin A$; $N' = R \cos A$.

Observons de plus, que chacune des quantités C, F, G, H, considérée comme fonction de A, est de la forme $\alpha' \cos A + \zeta' \sin A$, α' et ζ' ne contenant point A; donc puisque pour passer des fonctions B aux fonctions E, il suffit de changer $\cos A$ en $-\sin A$ et $\sin A$ en $+\cos A$, il s'ensuit que si la fonction $\frac{B}{\Delta}$ ou $R \cos a . \frac{C}{D}$, par exemple, est représentée par $\alpha' \cos A + \zeta' \sin A$, la fonction $\frac{2}{3}y' . \frac{E}{\Delta}$ le sera par $\frac{2}{3}y'(-\alpha' \sin A + \zeta' \cos A)$, et la somme des deux $\frac{1}{\Delta}(B + \frac{2}{3}y'E)$, le sera par

$$\alpha'(\cos A - \tfrac{2}{3}y' \sin A) + \zeta'(\sin A + \tfrac{2}{3}y' \cos A);$$

ou ce qui revient au même, en négligeant les secondes puissances de y' par

$$\alpha' \cos (A + \tfrac{2}{3}y') + \zeta' \sin (A + \tfrac{2}{3}y'),$$

d'où il suit que cette fonction ne sera autre chose que la quantité $\frac{B}{\Delta}$ ou $R \cos a . \frac{C}{D}$, dans laquelle au lieu de A on mettrait $A + \frac{2}{3}y'$; la partie $\frac{2}{3}y'$ ou $\frac{4}{3}(\theta' - \theta)$ devant être exprimée en degrés, minutes et secondes du moyen mouvement du soleil.

XXXI. Un résultat semblable aura lieu pour les fonctions analogues de B et de E qui entrent dans nos équations. Soient donc

$$C_1,\ F_1,\ G_1,\ H_1;$$

ce que deviennent les quantités C, F, G, H, lorsqu'on y met $A + \frac{2}{3}y'$ à la place de A, et nous aurons enfin, après avoir mis $\rho \cos a \cos b$ à la place de ρ:

$$\frac{\rho \cos b}{\xi} = \frac{R\theta\theta'}{2D} C_1$$

$$\frac{u'}{\xi} = \frac{Rx'}{2D} F_1 + \frac{Ry'}{2D} C_1 \cos a + \frac{Ry'}{2} \cos A$$

$$\frac{n'}{\xi} = \frac{Rx'}{2D} G_1 + \frac{Ry'}{2D} C_1 \sin a + \frac{Ry'}{2D} \sin A$$

$$\frac{p'}{\xi} = \frac{Rx'}{2D} H_1 + \frac{Ry'}{2D} C_1 \,\mathrm{tang}\, b.$$

Les choses étant réduites à cet état de simplicité, on calculera les trois coëfficiens F_2, G_2, H_2, d'après les valeurs

$$F_2 = \frac{\cos b}{\theta\theta' C_1}(x' F_1 + y' C_1 \cos a + y' D \cos A)$$

$$G_2 = \frac{\cos b}{\theta\theta' C_1}(x' G_1 + y' C_1 \sin a + y' D \sin A) \quad \ldots\ldots (50)$$

$$H_2 = \frac{\cos b}{\theta\theta' C_1}(x' H_1 + y' C_1 \,\mathrm{tang}\, b),$$

dans lesquelles il faut se rappeler qu'on a $x' = \frac{1}{2}(\theta' + \theta)$, $y' = \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$; et alors on aura simplement, par l'élimination de l'inconnue ξ,

$$\mu' = F_2 \rho, \quad \nu' = G_2 \rho, \quad p' = H_2 \rho. \quad \ldots\ldots (51)$$

Il en résulte donc

$$m' = M' + F_2 \rho$$
$$n' = N' + G_2 \rho \quad (52)$$
$$p' = H_2 \rho;$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation $m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{2}{r}$, elle devient

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 + 2\rho(M'F_2 + N'G_2) + \rho^2(F_2^2 + G_2^2 + H_2^2), \quad (53)$$

laquelle devra être combinée avec l'équation ordinaire

$$r^2 = R^2 - \rho(2R \cos c) + \rho^2,$$

afin d'en tirer les valeurs de R et ρ.

Il est visible que ces équations sont de même forme que celles qu'on a obtenues dans le cas de $\theta' = \theta$; de sorte que la solution générale, au moins dans l'hypothèse d'une orbite

parabolique, n'offre guère plus de complication que celle qui a lieu dans ce cas particulier. D'ailleurs les équations précédentes une fois résolues, tout le reste s'achève comme on l'a expliqué ci-dessus.

Application à la seconde comète de 1781.

XXXII. Proposons-nous de déterminer l'orbite de la seconde comète de 1781, d'après les trois observations suivantes, réduites pour chaque jour à 8h 29′ 44″, temps moyen à Paris.

Temps de l'obs.	*Longitude.*			*Latitude bor.*			*Lieu du* ☉			*Log. R*
Novembre.	D	M	S	D	M	S	D	M	S	
14	a° 307	14	45	b° 55	17	9	2[illegible]	54	2	9.99[illegible]
19	a 306	51	26	b 39	14	48	237	57	4	9.99[illegible]
24	a' 306	42	20	b' 31	4	52	24[illegible]	0	41	9.994028

Ces lieux sont tirés des *Mém. de l'Acad. des Scienc.* année 1780, pag. 67; et afin de rendre égaux les intervalles de temps entre les observations, on a interpolé les trois lieux des 19, 22 et 25 novembre, ce qui a donné le lieu du 24 tel que nous l'insérons ici. Ces sortes d'opérations se pratiquent fréquemment à l'égard des comètes, et elles sont utiles pour simplifier le calcul des élémens.

Si a°, a, a' sont trois longitudes observées aux temps $t-m$, t, $t+n$, respectivement, la longitude φ pour un temps quelconque $t+z$, intermédiaire entre ceux-là, se calcule par la formule

$$\varphi = \frac{(m+z)(n-z)}{mn}\,a - \frac{z(n-z)}{m(m+n)}\,a^{\circ} + \frac{z(m+z)}{n(m+n)}\,a'. \quad (34)$$

Il en est de même des latitudes.

XXXIII. A l'inspection du tableau précédent, on voit que le mouvement de la comète en longitude est très-petit ; circonstance peu favorable pour l'application de notre méthode, et sur-tout pour la détermination du coëfficient D. Cependant on peut observer que lorsque le mouvement en longitude est aussi lent que dans cet exemple, les observations ne sont pas sujettes à de si grandes erreurs, parce qu'alors la comète est comparée pendant plusieurs jours à la même étoile, ce qui donne des différences assez exactes.

Pour procéder à l'application de notre méthode, on commencera par calculer les coëfficiens C et D au moyen des formules (23) et (25), comme il suit :

$a^{o} - a'' = 23' \, 19''$	$a'' - a' = 9' \, 6''$	$a^{o} - a' = 32' \, 25''$
sin....... 7.8313893	*sin*....... 7.4227670	*sin*....... 7.9744886
tang b'.. 9.7801653	*tang b°*.. 0.1593929	*tang b*.. 9.9121887
7.6115546	7.5821599	7.8866767
Nomb. — 0.0040884	— 0.0038209	+ 0.0077033
— 0.0038209		— 0.0079093
— 0.0079093		D = — 0.0002060

Lieu du ☉ 237° 57′ 4″
180
A = 57° 57′ 4″

$A - a^{o} = 110° \, 42' \, 19''$	$A - a' = 111° \, 14' \, 44''$
sin......... 9.9710027	*sin*......... 9.9694327
tang b'.... 9.7801653	*tang b°*.... 0.1593929
9.7511680	0.1288256
Nomb... + 0.563856	— 1.345320
	+ 0.563856
	C = — 0.781464

On remarquera que si on eût augmenté α' d'une minute, le coëfficient C auroit subi très-peu de changement; mais le coëfficient D se seroit réduit à -0.0000237, valeur neuf fois moindre que l'autre. Une légère augmentation de plus dans la longitude α', auroit fait passer D du négatif au positif; d'où l'on voit combien il est à craindre que la valeur de D ne soit pas donnée avec assez de précision par les observations. Dans des cas semblables, il conviendra d'éviter tout emploi de ce coëfficient. Continuons cependant d'appliquer nos formules, comme si les observations données étoient exemptes d'erreur.

Puisque C et D sont de même signe, il s'ensuit qu'on a $r < R$, c'est-à-dire qu'au 19 novembre, époque de la seconde observation, la comète étoit moins éloignée que la terre du soleil. Ensuite pour déterminer r ainsi que ρ, distance de la comète à la terre, on résoudra les équations (29); mais d'abord il faut calculer les coëfficiens h et $2R\cos c$, d'après les formules (28), où l'on fera $\theta = 6^j$, ayant soin d'ajouter au logarithme de θ le log. constant 8.2355821.

$A - a = 111°\ 5'\ 38''$		C.........	9.692909
cos.........	9.556179	$\frac{1}{6}\theta^2$.........	1.096910 6.471164
cos b.......	9.888982	R.........	9.994426
cos c.......	9.445161	1 : D......	3.686133
2R.........	0.295456	1 : cos b...	0.111018
(2R cos c)...	9.740617	h.........	1.252560

XXXIV. Cela posé, en substituant la valeur de R dans les termes tout constans, les équations (29) deviennent

$$\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - 1.039253\right)$$

$$r^2 = 0.974658 - \rho(2R\cos c) + \rho^2.$$

On sachant déjà que r est compris entre R et R $\sin c$, on trouvera aisément par quelques fausses positions :

$$\log. r = 9.996862$$
$$\log. \rho = 9.712736.$$

Les vraies valeurs de ces quantités calculées d'après les élémens connus de l'orbite (vol. cité pag. 71), sont

$$\log. r = 9.990071$$
$$\log. \rho = 9.709226.$$

D'où l'on voit que par ce premier calcul la distance r est déterminée, à moins d'un 1000ème, et la distance ρ à moins d'un 120ème ; résultat beaucoup plus exact qu'on ne devoit s'y attendre, à cause de l'incertitude attachée à la valeur de D, et aussi parce que l'erreur des approximations étant de l'ordre θ^2, la solution semble devoir être exacte qu'à environ un 140ème, lorsque θ est de 5°, qui sont le 12ème des 58 jours pris pour unité (art. XXIII).

Mais si on examine de plus près l'influence de cette seconde cause, on trouvera qu'elle n'est pas à beaucoup près aussi considérable. En effet, la seconde des équations qu'on vient de résoudre, est une équation rigoureuse, qui ne peut être affectée que d'une très-legère erreur dans la valeur de $\cos C$. Quant à la première équation où h est la seule quantité qui peut participer à la fois de l'erreur des observations et de celle de la méthode, il est aisé de voir, par les valeurs connues de r et de ρ, qu'on a à très-peu près $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{15} \cdot \frac{dh}{h}$, et $\frac{dr}{r} = \frac{1}{120} \cdot \frac{dh}{h}$; de sorte qu'une erreur de $\frac{1}{8}$, par exemple, sur h, n'en donne qu'une de $\frac{1}{120}$ sur ρ, et une de $\frac{1}{1000}$ seulement sur r. Cela explique suffisamment l'exactitude que nous avons obtenue dans la solution précédente, sans avoir cependant une valeur de D fort approchée.

XXXV. Venons maintenant aux équations indépendantes

de D et qui doivent donner des résultats plus certains. Il faut d'abord calculer les coëfficiens P, Q, H, d'après les formules (31). Voici le détail de ce calcul :

sin (A—a°)...	9.9710027	*sin* (A—a)...	9.9698779	*sin* (A—a')...	9.9694327
sin (A—a')...	9.9694327	*sin* (A—a°)...	9.9710027	*sin* (A—a)...	9.9698779
2 *tang b*.......	0.2132187	*tang b'*.......	9.7801653	*tang b°*.......	0.1593929
	0.1536541		9.7210459		0.0987035
Nomb.....	+ 1.4244724		— 0.5260729		— 1.2551728
	— 1.7812457		— 1.2551728		
P =	— 0.3567733		— 1.7812457		

A — a° = 110° 42′ 19″
A — a' = 111 14 44
2A — a° — a' = 221 57 3

		sin(A—a)..	9.9698779	*sin*(A—a')..	9.9698779
		cos(A—a')..	9.5591471	*cos*(A—a°)..	9.5484643
		tang b°.....	0,1593929	*tang b'*.....	9.7801653
sin..........	9.8250966		9.6884179		9.2985075
tang b.....	9.9121887				
	9.7372853		+ 0,4879979		+ 0,1988417
	— 0.5461165		+ 0.1988417		
			+ 0.6868396		
			— 0.5461165		
		Q =	+ 0.1407231		

sin(A—a')...	9.9694327	*sin*(A—a°)...	9.9710027	*sin*(A—a)...	9.9698779
tang b......	9.9121887	*tang b*......	9.9121887	*tang b°*...	0,1593929
tang b°.....	0.1593929	*tang b'*.....	9.7801655	2 *tang b'*...	0.0811953
	0.0410143		9.6633567		0.2104661
	+ 1.0990420		+ 0.4606348		— 1.6235517
			+ 1.0990420		+ 1.5596768
			+ 1.5596768	H =	— 0.0638749

Il faut ensuite substituer ces valeurs de P, Q, H, dans l'équation (33).

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 - \frac{2\rho\cos b}{\theta C}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\epsilon^2}{R}P + \epsilon\sin\Psi Q\right)$$

$$+ \frac{\rho^2\cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2).$$

Voici le calcul des coëfficiens dans lesquels la valeur de $\epsilon \sin \Psi$ a été déduite de *log.* R par la méthode de l'art. XII.

C......	9.892909	P......	9.552392	Q......	9.148366
θ......	8.934552	$\frac{\cos b}{\theta C}$......	1.061521		1.061521
$1 : \cos b$...	0,111018				
	8.938479		0.613913		0.209887
		$\frac{1-\frac{1}{2}\epsilon^2}{R}$...	0,005513	$\epsilon \sin\Psi$...	8.043643
$\frac{\cos b}{\theta C}$......	1,061521				8.253530
			0.619426		
H......	8.805330	Nomb.	− 4.163192		+ 0.017928
	9.866851				− 4.163192
					− 4.145264

$$\frac{\cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2) = 20.06817.$$

On aura donc l'équation

$$\frac{1}{r} = 0.512917 - \rho(4.14526) + \rho^2(10.03409)$$

log.... 0.617552 1.001478,

qu'il faut combiner avec l'équation déjà trouvée,

$$r^2 = 0.974658 - \rho(2R\cos\rho) + \rho^2$$

log...... 9.740617,

et on trouvera pour solution,

log. r = 9.990050

log. ρ = 9.709582 ;

valeurs qui ont toute l'exactitude qu'on peut desirer, puisqu'il n'y a que très-peu de différence entre ces valeurs et celles qu'on a données ci-dessus d'après les vrais élémens de l'orbite.

XXXVI. Il faut maintenant déterminer ces élémens tels qu'ils résultent de nos trois observations : or par les calculs précédens on a

$\frac{\cos b}{\theta C}$ P.........	0.613913	$\frac{\cos b}{\theta C}$ Q.........	0.209887	$\frac{\cos b}{\theta C}$ H...	9.866851
ρ.........	9.709582	ρ.........	9.709582	ρ...	9.709582
	0.323495		9.919469	p'...	9.576433

$\frac{\rho \cos b}{\theta C}$ P =	2.106177	$\frac{\rho \cos b}{\theta C}$ Q =	− 0.830748
$\frac{1 - \frac{1}{2} t^2}{R}$.......	1.012775	$t \sin \psi$..........	0.011057
P' =	+ 1.093402	Q' =	− 0.841805

Des deux nombres P' et Q' ainsi trouvés, il sera facile de déduire m' et n' par les formules (32), qui donnent

$$m' = P' \sin A + Q' \cos A$$
$$n' = - P' \cos A + Q' \sin A.$$

Enfin les trois autres quantités m, n, p se calculeront par les formules (27), et on aura pour résultat les logarithmes suivans :

m......	9.881887	m'.......	9.681301
n.......	9.715418	$(-n')$......	0.111839
p......	9.510753	p'.......	9.576433

où l'on a indiqué que n' est la seule de ces six quantités qui soit négative. On conclura de-là

$$mn' - m'n = - 1.234955 \ldots\ldots 0.091651$$
$$mp' - m'p = 0.131674 \ldots\ldots 9.119499$$
$$np' - n'p = 0.615183 \ldots\ldots 9.789004$$

XXXVII. Puisque $mn' - m'n$ est négatif, le mouvement de la comète est rétrograde, et les équations (41) deviendront :

$$m'n - mn' = \cos I \sqrt{2\Pi}.$$
$$-(mp' - m'p) = \sin I \cos S \sqrt{2\Pi}$$
$$-(np' - n'p) = \sin I \sin S \sqrt{2\Pi}$$

Des deux dernières on tire

$$mp' - m'p \ldots\ldots \quad 9.119499$$
$$np' - n'p \ldots\ldots \quad 9.789004$$
$$\text{tang } S \ldots\ldots \quad 0.669505.$$

Ainsi l'angle S est de 77° 55′ 7″, ou de 257° 55′ 7″; or il faut, par les équations précédentes, que *sin* S et *cos* S soient négatifs, puisque *sin* I ne peut l'être ni $\sqrt{2\pi}$; donc on a

$$S = 257^\circ\ 55'\ 7''.$$

Connoissant S, on trouvera immédiatement I par la formule

$$\sin S \text{ tang } I = -\frac{(np' - n'p)}{m'n - mn'},$$

qui donne

$$I = 26^\circ\ 59'\ 43''\ 5.$$

Enfin on aura aussi la distance périhélie par la formule $\sqrt{2\pi} = \frac{m'n - mn'}{\cos I}$; d'où l'on tire $\log. \pi = 9.982474$, ou cette distance elle-même

$$\pi = 0.960449.$$

L'anomalie déduite de la formule $\cos^2 \frac{1}{2} \psi = \frac{\pi}{r}$, sera

$$\psi = 15^\circ\ 6'\ 46''.$$

Avec cette anomalie, on trouve dans la table des comètes le temps correspondant $T = 10^j.9697$; ensuite la formule $t = \pi^{\frac{3}{2}} T$, donne $t = 10^j.3254$. C'est l'intervalle de temps entre l'observation du 19 novembre et le passage de la comète au périhélie. Pour savoir si la seconde époque précède la première ou en est précédée, il faut calculer la quantité k, ou seulement en déterminer le signe d'après la formule

$$k = mm' + nn' + pp'.$$

Or à l'inspection des nombres qui entrent dans cette valeur, on reconnoît bientôt que k est négatif, et qu'ainsi à l'époque du

19 novembre, 8^h 29′ 41″ temps moyen, la comète n'avoit pas encore atteint son périhélie. Donc en ajoutant à cette date l'intervalle trouvé 10^j 3254 ou 10^j 7^h 48′ 35″, on aura l'instant du passage au périhélie : 29 novembre 16^h 18′ 19″, ou novembre 29,6794.

XXXVIII. Il reste à trouver le lieu du périhélie, et d'abord il faut trouver la longitude héliocentrique φ de la comète, par la formule $tang\,\varphi = \frac{n}{m}$ qui donne $\varphi = 34^\circ\ 16'\ 42''$, ou $\varphi = 214^\circ\ 16'\ 42''$; la première est celle qu'il faut choisir, parce que *sin* φ et *cos* φ doivent avoir les mêmes signes que n et m respectivement, lesquels sont positifs. Enfin la formule $tang\,\sigma = \frac{tang\,(\varphi - S)}{cos\,I}$, donne

φ.....	34°	16′	42″	$tang\,(\varphi - S)$.....	9.979379
S.....	257	55	7	*cos* I.....	9.949899
$\varphi - S$ =	136	21	35	$tang\,\sigma$......	0.029480
					$\sigma = 133^\circ\ 3'\ 25''$

et par la quantité $\sigma - \psi + S$, on trouve ce que les astronomes appellent le lieu du périhélie,

15° 51′ 46″.

Rassemblant ces divers résultats, on aura les élémens de l'orbite de la seconde comète de 1781, tels qu'ils résultent des trois observations données ; nous les mettons ici en comparaison avec les élémens corrigés qu'on trouve dans les Mémoires de 1781, page 71.

ÉLÉMENS APPROCHÉS.		ÉLÉMENS CORRIGÉS.
Distance périhélie............	0.960449	0.960995
Lieu du nœud ascendant.....	77° 55′ 7″	77° 22′ 55″
Inclinaison............	26 59 44	27 12 4
Lieu du périhélie............	15 51 46	16 3 7
Passage au périhélie : novembre	29^j 16^h 18′ 19″	29^j 12^h 42′ 46″
Sens du mouvement................	Rétrograde.	Rétrograde.

XXXIX. La différence de ces deux systêmes d'élémens est assez petite pour qu'on ait lieu de s'étonner qu'un premier essai de calcul, fondé sur trois observations faites dans l'intervalle de dix jours seulement, ait pu conduire à une connoissance si approchée de la véritable orbite. Mais pour comparer encore mieux les deux systêmes, nous avons calculé dans chacun d'eux les lieux géocentriques de la comète aux époques des trois observations. Voici le résultat de ce calcul :

ÉLÉMENS APPROCHÉS.														
Époques.	*Long. calculée.*			*Long. observée.*			*Differ.*	*Latit. calcul.*			*Latit. observ.*			*Differ.*
Nov[bre].	D	M	S	D	M	S	S	D	M	S	D	M	S	S
14	307	15	46	307	14	45	+ 61	55	20	55	55	17	9	+226
19	306	51	27	306	51	26	+ 1	39	14	49	39	14	48	+ 1
24	306	41	59	306	42	20	− 21	31	3	50	31	4	52	− 62
ÉLÉMENS CORRIGÉS.														
14	307	17	59	307	14	45	+194	55	15	14	55	17	9	−115
19	306	53	6	306	51	26	+100	39	13	53	39	14	48	− 55
24	306	43	28	306	42	20	+ 28	31	6	24	31	4	52	+ 92

Il résulte de cette comparaison, que nos élémens approchés représentent mieux les longitudes que les élémens corrigés, et qu'ils n'ont du désavantage sur ceux-ci que dans la seule latitude du 14 novembre. Ce résultat inattendu prouve que notre méthode a toute l'exactitude nécessaire pour une première approximation ; mais on devra toujours corriger, par des calculs faits sur des observations éloignées, les élémens donnés par des observations peu distantes entre elles ; car on ne réussit pas toujours à représenter par une même orbite parabolique

toutes les observations d'une comète ; et en cas de différence sensible dans les résultats, on doit préférer l'orbite qui satisfait le mieux aux observations éloignées. Enfin si la différence étoit plus considérable, il faudroit avoir recours à une orbite elliptique ou hyperbolique.

Autre application à la comète de 1769.

XL. Pour apprécier encore mieux l'exactitude de notre méthode, nous allons l'appliquer, non à des observations toujours susceptibles d'erreurs d'où peuvent résulter des compensations ; mais à des lieux de la comète de 1769, calculés d'après les élémens connus. Les différences qu'on trouvera entre les élémens déduits de ces observations fictives et les vrais élémens, seront des erreurs dues tout entières à la méthode, et serviront à fixer le degré d'approximation auquel elle peut atteindre.

Epoques.	*Longitude.*				*Latitude austr.*				*Lieu du* ☉			*Log.* R.
Septembre.		D	M	S		D	M	S	D	M	S	
8 à 14h.	a°	101	18	8	b°	22	14	35	166	35	31	0.0026648
10 *id.*	a	112	51	31	b	23	28	15	168	32	22	0.0024242
12 *id.*	a'	124	26	47	b'	23	48	36	170	29	20	0.0021838

Voici d'abord le calcul des coëfficiens D et C :

$a - a^{\circ} = 11^{\circ}\,33'\,23''$	$a' - a = 11^{\circ}\,35'\,16''$	$a' - a^{\circ} = 23^{\circ}\,8'\,39''$
sin...... 9.3017509	*sin*....... 9.3029128	*sin*...... 9.5944435
tang b'.. 9.6446956	*tang* b°.. 9.6116907	*tang* b.. 9.6376970
8.9464465	8.9146035	9.2321405
Nomb. + 0.0883988	+ 0.0821492	− 0.1706635
+ 0.0821492		+ 0.1705480
+ 0.1705480		D = − 0.0001155

$A = 348° 32' 22''$				
$A - a° = 247° 14' 14''$		$A - a' = 224° 5' 35''$		
sin.........	9.9647849	*sin*.........	9.8425005	
tang b'....	9.6446956	*tang b°*....	9.6116907	-0.4068933
				$+0.2845714$
	9.6094805		9.4541912	
				$C = -0.1223219$
Nomb...	$-$ 0.4068933		$+$ 0.2845714	

Puisque C et D sont de même signe, il s'ensuit qu'on a $r < R$, comme dans l'exemple déjà apporté; ensuite faisant $\theta = 2^{j}$, on aura

$A - a = 235° 40' 51''$		$\frac{1}{2}\theta^2$.........	0.3010300
			6.4711642
cos.........	9.7511269	C...........	9.0875041
cos b.......	9.9624938	R..........	0.0024242
cos c........	9.7136207	1 : D......	3.9374180
2R.........	0.3034542	1 : *cos b*..	0.0375062
(2R*cos c*)...	0.0170749	*h*...........	9.8370467

XLI. Au moyen de ces valeurs, on aura à résoudre les équations

$$\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - 0.983394\right)$$
$$r^2 = 1.011226 - \rho(2R\cos c) + \rho^2;$$

et comme on sait que r est compris entre R et R*sin c*, on trouvera aisément la solution

$$\log. r = 9.946165$$
$$\log. \rho = 9.506414.$$

Les vraies valeurs de ces logarithmes, calculés par les élémens exacts, sont 9.945573 et 9.513676; d'où l'on voit que l'erreur est +592 sur le premier logarithme, et $-$7262 sur le second, ce qui répond à une erreur d'un 740ème sur le pre-

mier nombre, et d'un 60ème sur le second. Si ces premières déterminations ne sont pas plus exactes, c'est que $3h \cos c$ est plus grand que R^4, mais en diffère peu ; de sorte, que, suivant l'art. XV, les équations à résoudre sont très-près de la limite, passé laquelle elles seroient susceptibles de deux solutions. Alors les deux courbes qui se coupent sont très-près de se toucher, et leur intersection se détermine moins exactement. Pour faire cadrer entièrement la solution de nos deux équations avec les vraies valeurs de r et de ρ, il suffiroit de prendre 1150 au lieu de 1155 pour la valeur de D, changement qui répond à un dixième de seconde sur a^0 ou sur a'.

XLII. Il faut passer maintenant au calcul des coëfficiens P, Q, H, d'après les formules (31) :

$\sin(A-a^0)$...	9.9647849	$\sin(A-a^0)$..	9.9647849	$\sin(A-a')$...	9.8425005
$\sin(A-a')$...	9.8425005	$\sin(A-a)$...	9.9169325	$\sin(A-a)$...	9.9169325
$2 \tang b$.......	9.9387270	$\tang b'$........	9.6446956	$\tang b^0$.........	9.6116907
	9.7460124		9.5264130		9.3711237
Nomb.....	+ 0.5572017		— 0.3360571		— 0.2350302
	— 0.5710873		— 0.2350302		
P =	— 0.0138856		— 0.5710873		

				$A - a^0 =$	247° 14′ 14″
$\sin(A-a)$..	9.9169325	$\sin(A-a)$..	9.9169325	$A - a' =$	224 5 35
$\cos(A-a')$..	9.8562518	$\cos(A-a^0)$..	9.5876174		
$\tang b^0$......	9.6116907	$\tang b'$.......	9.6446956	$2A-a^0-a' =$	111 19 49
	9.3848750		9.1492455	$\sin$..........	9.9691824
Nomb...	— 0.2425912		— 0.1410086	$\tang b$.....	9.6376970
			— 0,2425912		9.6068794
			— 0.3835998		+ 0.4044635
					— 0.3835998
				Q =	+ 0.0208637

$\sin(A-a)$... 9.9169325	$\sin(A-a')$... 9.8425005	$\sin(A-a^{o})$... 9.9647849
$\tang b^{o}$..... 9.6116907	$\tang b$...... 9.6376970	$\tang b$...... 9.6376970
$2 \tang b'$..... 9.9457256	$\tang b^{o}$.... 9.6116907	$\tang b'$...... 9.6446956
9.4743488	9.0918882	9.2471775
Nomb..... + 0.2980910	− 0.1235629	− 0.1766760
− 0.3002389	− 0.1766760	
H = − 0.0021479	− 0.3002389	

Si l'on veût voir quel est le résultat qu'on tireroit des équations (33) et (34), il faut multiplier les valeurs de P, Q, H, par $\frac{R\theta}{D}$ dont le logarithme est 2.4764543; d'ailleurs par l'article XII on a $\log.(\varepsilon \sin \Psi) = 8.1969643$, ce qui donne :

P...... 8.1425647	Q...... 8.3193914	H...... 7.3320141
2.4764543	2.4764543	2.4764543
0.6190190	0.7958457	9.8084684
$\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}$... 9.9975146	$\varepsilon \sin \Psi$... 8.1969643	
0.6165336	8.9928100	
Nomb... − 4.135553	+ 0.098358	
	− 4.135553	
	− 4.037195 = *coëf. de* ω.	

On trouve de même, pour le coëfficient de ω^2,

$$\frac{R^2\theta^2}{4D^2}(P^2+Q^2+H^2) = 14.192485.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (33) et (34), et faisant toujours $\frac{1}{a} = 0$, on aura à résoudre les équations

$$\frac{1}{r} = 0.494434 - \omega(2.018598) + \omega^2(7.096243)$$

log.... 0.305050 0.851028

$$\frac{1}{r^3} = 0.983394 + \omega.$$

Or connoissant déjà les limites de r, on trouvera facilement la solution

$$log.\ r = 9.945435$$
$$log.\ \omega = 9.676148;$$

et de la valeur de ω, on déduira celle de $\rho = \omega . \frac{R\theta}{D} . \frac{C\theta}{2 \cos b}$, qui donne $log. \rho = 9.513195.$

Les vraies valeurs de *log*. r et *log*. ρ étant 9.945573 et 9.513676, on voit que l'erreur est — 138 sur le premier logarithme, et — 481 sur le second, ce qui ne fait qu'un 3000ème d'erreur sur r, et un 900ème sur ρ.

XLIII. Venant ensuite à l'équation (35), on pourra déduire ses coëfficiens de ceux de l'équation précédente, au moyen de la valeur $\omega = \rho . \frac{2 D \cos b}{R \theta^2 C}$, dont on a déjà calculé le coëfficient pour passer de la valeur de ω à celle de ρ. On aura donc de cette manière les équations suivantes en r et ρ :

$$\frac{1}{r} = 0.494434 - \rho(C') + \rho^2(C'')$$

log.... 0.468003 1.176934

$$r^2 = 1.011226 - \rho(2 R \cos c) + \rho^2$$

log.... 0.017075,

dont la résolution donne

$$log.\ r = 9.945619$$
$$log.\ \rho = 9.513102.$$

On voit que l'erreur est encore diminuée sur le premier logarithme, mais qu'elle est augmentée à-peu-près d'autant sur le second.

Comme le résultat de ces dernières équations est celui qui

mérite le plus de confiance, lorsqu'on n'a encore aucune connoissance des élémens de l'orbite, nous continuerons, d'après ce résultat, le calcul nécessaire pour obtenir une première approximation vers ces élémens.

XLIV. Il suffit le plus souvent de connoître la distance périhélie, parce qu'avec cette distance et le rayon vecteur r, on détermine facilement l'anomalie vraie au temps de la seconde observation, et l'instant du passage de la comète par le périhélie. Or ces premiers élémens étant connus d'une manière approchée, on a les moyens de les rectifier et de déterminer les autres élémens de l'orbite, en comparant les observations les plus exactes faites à de grands intervalles de temps.

Si donc on veut se borner à la recherche de la distance périhélie, il faut faire usage des formules (37) et (40); savoir, $\Pi = r - \frac{1}{2}k^2$, et

$$k = \rho \cos b \sin(A-a).P' + (R - \rho \cos c)\,Q' + \rho \sin b.H'\,; \quad (56)$$

formule où l'on a fait pour abréger,

$$P' = \frac{\rho \cos b}{\theta C}P - \frac{(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2)}{R}, \quad H' = \frac{\rho \cos b}{\theta C}H$$

$$Q' = \frac{\rho \cos b}{\theta C}Q - \epsilon \sin \Psi. \quad (57)$$

Or dans cet exemple on trouve

$\rho \cos b \sin(A-a)$....	9.3925283	
P'.............	7.8983630	
	7.2908913....	+ 0.0019538
$R - \rho \cos c$........	9.9227514	
Q'............	0.1754585	
	0.0982099....	− 1.2537470
$\rho \sin b.H'$..........	8.2967865....	+ 0.0198055
		− 1.231988 = k.

Puisque k est négatif, il s'ensuit qu'au 10 septembre, époque de l'observation moyenne, la comète n'avoit pas encore atteint son périhélie; on en déduit

$$\Pi = r - \tfrac{1}{2} k^2 = 0.123408.$$

XLV. Pour avoir à la fois tous les élémens de l'orbite, tels qu'ils peuvent résulter de nos trois observations, il faut calculer les valeurs des six coëfficiens $m, n, p; m', n', p'$, d'après les formules

$$\begin{array}{ll|ll} m = & R \cos A + \rho \cos b \cos a & m' = & P' \sin A + Q' \cos A \\ n = & R \sin A + \rho \cos b \sin a & n' = & -P' \cos A + Q' \sin A \\ p = & \rho \sin b & p' = & H' \end{array}$$

et on trouvera leurs logarithmes comme il suit, en observant que m' est la seule de ces quantités qui soit négative:

m......	9.9392289	$(-m')$......	0.1662465
n.......	8.8788956	n'.......	9.4848145
p.......	9.1132928	p'.......	9.1834937

De-là on déduit les logarithmes des trois quantités suivantes, dont les deux premières sont positives et la troisième négative

$(mn' - m'n)$........ 9.5756968
$(mp' - m'p)$........ 9.5092008
$-(np' - n'p)$........ 8.4485937

XLVI. De ce que $(mn' - m'n)$ est positive, on conclut d'abord que le mouvement de la comète est direct; il faut donc prendre le signe supérieur dans les équations (41), et on aura

$$mn' - m'n = \cos I \sqrt{2\Pi}.$$
$$mp' - m'p = \sin I \cos S \sqrt{2\Pi}$$
$$np' - n'p = \sin I \sin S \sqrt{2\Pi}$$

A l'inspection des deux dernières, on voit que $\sin$ S doit être

négatif et cos S positif ; de sorte que l'angle S calculé par la formule

$$tang\,S = \frac{np' - n'p}{mp' - m'p} \qquad \begin{array}{r} 8.4485937 \\ 9.5092008 \\ \hline tang\,S\ldots\ldots\ 8.9393929 \end{array}$$

doit être compris entre 270° et 360° ; et comme la tangente, qui est négative, appartient également aux deux angles 175° 1′ 45″.2 et 355° 1′ 45″.2, on doit s'arrêter au dernier,

$$S = 355^\circ\ 1'\ 45''.2.$$

C'est le lieu du nœud descendant, suivant la règle de l'art. XXV, puisque le mouvement est direct et la latitude australe.

L'inclinaison I se calculera par la formule

$$tang\,I = \frac{mp' - m'p}{(mn' - m'n)\cos S},$$

qui donne I = 40° 44′ 14″7.

Enfin la distance périhélie étant calculée par l'équation

$$\Pi = \frac{(mn' - m'n)^2}{2\cos^2 I},$$

on aura $log.\ \Pi = 9.0913596$, ou $\Pi = 0.1234126$, valeur qui s'accorde suffisamment avec celle que nous avons déduite de la valeur de k.

La distance Π étant connue, on aura l'anomalie ψ par la formule $\cos^2 \frac{1}{2}\psi = \frac{\Pi}{r}$, d'où l'on tire $\psi = 136^\circ\ 4'\ 30''.4$.

Cette anomalie répond, dans la table des comètes, au temps $T = 621^j.749$, et ce nombre étant multiplié par $\Pi^{\frac{3}{2}}$, on aura $t = 26^j.9560$, qui ajouté au temps de l'observation moyenne *sept.* 10.5833, donnera *sept.* 37.5393 ou *octobre* 7.5393 pour l'instant du passage de la comète par le périhélie.

La longitude héliocentrique φ est donnée par la formule

$tang\,\varphi = \frac{n}{m}$, où l'on doit observer de rendre le signe de $sin\,\varphi$ conforme à celui de n, ou celui de $cos\,\varphi$ à celui de m. On aura ainsi $\varphi = 4^\circ\,58'\,26''$ et $\varphi - S = 9^\circ.56'\,40''.8$. Ensuite la distance σ de la comète au nœud dont la longitude est S, se calcule par la formule

$$tang\,\sigma = \frac{tang\,(\varphi - S)}{cos\,I},$$

qui donne $\sigma = 13^\circ\,1'\,52''.8$. Enfin la somme $S + \sigma + \psi$, puisque la comète marche vers son périhélie (art. XXVI), donnera pour le lieu du périhélie, $144^\circ\,8'\,8''.4$.

Voici le résultat de tous ces calculs comparé aux vrais élémens de l'orbite :

ÉLÉMENS APPROCHÉS.		ÉLÉMENS VRAIS.
Log. dist. périhélie............	9.091360	9.090847
Passage au périhélie..... *Octobre*	7.5393	*Octobre*..... 7.5310
Lieu du nœud ascendant.......	175° 1′ 45″	175° 3′ 46″
Inclinaison.............	40 44 15	40 47 56
Lieu du périhélie............	144 8 8	144 11 32
Sens du mouvement....................		*Direct.*

OBSERVATION GÉNÉRALE.

XLVII. Les deux exemples que nous avons choisis pour l'application de notre méthode, sont aussi différens qu'il est possible. Dans le premier, le mouvement en longitude est très-lent, et le mouvement en latitude très-prompt. Dans le second, au contraire, le mouvement en longitude est très-prompt, et le mouvement en latitude très-lent. Dans l'un, l'intervalle des observations est de 10 jours ; dans l'autre, il n'est que de 4 ; et cependant le succès de la méthode a été à-peu-près le même dans l'un et dans l'autre. On a obtenu les élémens de l'orbite très-peu différens de ceux que donne la combinaison d'un plus

grand nombre d'observations ou d'observations faites à de plus grands intervalles de temps.

Il y a lieu de croire que le succès sera le même dans les diverses applications qu'on voudra faire de cette méthode, sauf peut-être quelques exceptions qui pourront dépendre ou de l'inexactitude des observations ou de quelques circonstances particulières peu favorables, telles qu'une très-petite inclinaison de l'orbite, qui ne permettroit pas d'employer avec sûreté les latitudes observées. Le cas le plus défavorable de tous seroit celui où la vraie orbite différeroit très-sensiblement d'une parabole, et où en même temps la distance de la comète au soleil, lors de la seconde observation, différeroit très-peu de celle de la terre au soleil; car alors l'emploi des équations (29) pourra être défectueux à cause de l'incertitude sur la valeur de D, et on ne pourroit pas non plus faire usage de l'équation (35), puisque $\frac{1}{a}$ ne seroit pas assez petit pour être négligé.

Au reste, nous avons réduit les formules autant qu'il a été possible pour la commodité des calculateurs : nous avons donné des règles sûres pour distinguer, dans le résultat des formules, le nœud ascendant du nœud descendant, les époques avant le périhélie des époques après le périhélie, et enfin pour prendre chaque chose avec le signe qui lui convient, sans avoir recours aux figures qui sont cependant utiles pour diriger le calcul.

Mais on ne sauroit trop recommander aux calculateurs d'apporter le plus grand soin à bien déterminer les signes des différens termes qui entrent dans les formules, et principalement dans les valeurs des coëfficiens C, D, P, Q, H, d'après les règles connues des sinus, cosinus et tangentes considérés dans les divers quarts de la circonférence. L'attention, à cet égard, est d'autant plus nécessaire, que rien n'y peut suppléer, et que la moindre négligence peut faire augmenter considérablement un travail déjà long et fastidieux, ou donner à croire mal-à-propos que la méthode qu'on a suivie est défectueuse.

SECONDE PARTIE.

Méthode pour corriger les élémens de l'orbite connus par une première approximation.

XLVIII. Nous prendrons pour exemple la comète de 1769 qui a été observée pendant un long espace de temps, avant et après son passage par le périhélie, et nous choisirons les trois observations suivantes tirées de la Cométographie de Pingré, tome II, page 368.

Temps moyen à Paris.	*Longitude de la Comète.*			*Sa Latitude.*				*Lieu du ⊙*			*Log. R.*
	D	M	S	D	M	S		D	M	S	
Août. 14.52352	39	58	16	3	17	30	A	142	21	26	0.0052440
Sept.. 15.69398	140	39	17	22	43	34	A	173	31	30	0.0018100
Déc... 2.21413	276	41	20	23	33	25	B	250	54	12	9.9934960

Supposons que par les premiers essais on a trouvé le logarithme de la distance périhélie $= 9.0900000$, et l'instant du passage au périhélie le 7 octobre à 12 heures environ; nous prendrons pour ces deux élémens corrigés,

$$\log. \Pi = 9.0900000 + \varpi(10000)$$

$$\text{Passage au périhélie... octobre } 7.50 + \tau(0.25)$$

La correction $\varpi(10000)$ est exprimée en unités décimales du septième ordre; et la correction $\tau(0.25)$ représente une fraction de jour qui iroit à $\frac{1}{4}$ de jour ou 6^h, si on avoit $\tau = 1$. Ces nombres sont ainsi choisis, parce qu'on suppose que la véritable époque du passage au périhélie, doit être entre 7.25 et 7.75; et que le vrai *log.* de la distance périhélie est pareille-

ment compris entre 9,089 et 9,091, ou du moins qu'il s'écarte peu de ces limites.

XLIX. Cela posé à l'aide de ces deux élémens, on doit calculer les anomalies et les rayons vecteurs qui ont lieu à l'instant de chaque observation. Voici le détail de ce calcul appliqué à la seconde observation : on y verra les précautions à prendre pour tenir compte des corrections indéterminées.

Passage au périhélie... oct^{bre} 7.50, ou sept^{bre} $37.50 + \tau(0.25)$
Temps de l'observation................ sept^{bre} 15.69398

Différence................................ $t = 21^{j}.80602 + \tau(0^{j}.25)$

Le logarithme de 21.80602 est 1.3385764; pour avoir la partie additionnelle due à la correction $\tau(0.25)$, on pourroit prendre la différence logarithmique de 21806 à 21807, laquelle est 199, et multiplier cette différence par 250, ce qui donneroit 49750; d'où résulte le logarithme entier de $t = 1.3385764 + \tau(49750)$. Mais pour plus d'exactitude, il faut prendre la différence qui répond à une unité plus élevée, moitié en dessus, moitié en dessous du nombre constant; par exemple, celle qui a lieu de 21756 à 21856. Cette différence est 19916 : on la trouve facilement, par la disposition des tables, en remontant et descendant de cinq degrés dans la même colonne au-dessus et au-dessous de 21806. En vertu de cette différence, l'excès logarithmique qui répond à $\tau(0.10)$ sera $\tau(19916)$; donc l'excès qui répond à $\tau(0.25)$ sera $\tau(49790)$, peu différent de celui qu'on avoit trouvé immédiatement. On aura ainsi,

$$log.\ t = 1.3385764 + \tau(49790).$$

D'ailleurs on a

$$\tfrac{1}{2}\,log.\ H = 8.6350000 + \varpi(15000).$$

Retranchant le second du premier, il restera

$$2.7035764 + \tau(49790) - \varpi(15000).$$

C'est le *log.* du temps T employé à parcourir une égale anomalie ψ dans la parabole dont la distance périhélie est 1.

Le logarithme 2.7035764 répond au nombre 505.332. Pour avoir la partie additionnelle, j'observe que l'unité de différence entre les nombres 504.83 et 505.83, produit entre leurs logarithmes la différence 8592; donc à proportion les différences logarithmiques 49790 et 15000, donneront entre les nombres les différences 5.795 et 1.746. De sorte qu'on aura

$$T = 505^{j}.332 + \tau(5^{j}\,795) - \varpi(1^{j}\,746).$$

Dans la table du mouvement des comètes, on trouve pour 504 jours, l'anomalie 132° 19′ 59″, et pour 2 jours de plus, une différence de 4′27″ ou 4′ 450. Donc l'anomalie qui répond à la valeur de T est

$$\psi = 132^{\circ}\,22'\,56''8 + \tau(12'\,894) - \varpi(3'\,885),$$

où l'on voit que les corrections sont exprimées en minutes et millièmes de minute, ce qui est plus commode pour le calcul que des expressions réduites toutes en secondes, attendu qu'il faut rapporter les différences à une unité au moins égale à la minute.

Il faut chercher maintenant le logarithme-cosinus de l'angle

$$\tfrac{1}{2}\psi = 66^{\circ}\;11'\;28''4 + \tau(6'\,447) - \varpi(1'\,942).$$

Ce logarithme, pour la partie connue, est 9.6060431 : pour avoir l'autre partie, je trouve dans la table qu'une minute de plus dans l'angle fait diminuer le *log.-cosinus* de 2865, et qu'une minute de moins le fait augmenter de 2862. Le milieu de ces différences est 2863½ pour 1′; donc pour 6′447 la différence sera 18461, et pour 1′942, elle sera 5561. On aura donc

$$\begin{aligned}
&\textit{log. cos}\ \tfrac{1}{2}\psi = 9.6060431 - \tau(18461) + \varpi(5561)\\
&\text{son double.... } 9.2120862 - \tau(36922) + \varpi(11122)\\
&\textit{log. } \Pi \text{.........} 9.0900000 \qquad\qquad\quad + \varpi(10000)\\
&\text{Diff. ou } \textit{log. } r = 9.8779138 + \tau(36922) - \varpi(1122)
\end{aligned}$$

c'est le logarithme du rayon vecteur calculé d'après la formule (38).

L. Pour aller plus loin, il est bon de diriger le calcul par une figure qui représente à-peu-près la position relative de la terre T, du soleil S, de la comète C, et de sa projection K sur le plan de l'écliptique (fig. 2).

Longitude du ☉	173° 31′ 30″
Long. de la comète....	140 39 17
Elongation KTS.....	32 52 13

Il faut en conclure l'angle CTS entre la comète et le soleil (angle qui a été appelé ω dans la première partie); on le trouve par la formule $\cos CTS = \cos KTS . \cos CTK$, où $CTK = b = 22° 43' 34''$;

cos KTS....	9.9242284
cos b	9.9649015
cos CTS....	9.8891299

CTS = 39° 13′ 21″8.

Dans le triangle CTS, connoissant les deux côtés ST = R, CS = r, et l'un des angles opposés CTS, on calculera d'abord l'angle TCS par la formule $\sin TCS = \frac{R}{r} \sin CTS$, qui donne

R......	0.0018100
sin CTS....	9.8009486
1 : *r*........	0.1220862 — τ (36922) + ϖ (1122)
sin TCS....	9.9248448 — τ (36922) + ϖ (1122)

De là résultent deux valeurs de TCS (parce que l'angle CTS n'est pas obtus), et il faudra se décider entre l'une ou l'autre, d'après la connoissance approchée de l'orbite. Dans ce cas, on doit prendre la plus grande, savoir

$$TCS = 122° 44' 38''8 + \tau (45'' 470) - \varpi (1'' 382);$$

et comme on a déjà CTS = $39° 13' 21''9$, le troisième angle du même triangle

$$CST = 18° 1' 59''3 - \tau(45' 470) + \varpi(1' 382).$$

Cela posé, la latitude héliocentrique CSK = λ, se calculera par la formule $\sin\lambda = \frac{\sin b \sin CST}{\sin CTS}$.

sin b	9.5869544
sin CST. . . .	9.4907547 $- \tau(176446) + \varpi(5363)$
1 : *sin* CTS. . . .	0.1990514
sin λ.	9.2767605 $- \tau(176446) + \varpi(5363)$

De-là résulte $\lambda = 10° 54' 7''2$ — &c.; mais les corrections de l'angle sont inutiles à calculer, et il suffit d'avoir celles du log. cosinus. On peut trouver celles-ci, en observant d'après les tables, qu'une différence de 65600 sur le log. sinus, répond à une de 2434 sur le log. cosinus : on peut aussi multiplier les corrections de *log. sin* λ par *tang*$^2\lambda$, afin d'en déduire celles de *log cos* λ avec un signe contraire. Ce dernier moyen, qui est le plus simple, donnera

$$\log\cos\lambda = 9.9920903 + \tau(6546) - \varpi(198).$$

Maintenant l'angle de commutation KST se calculera par la formule $\cos KST = \frac{\cos CST}{\cos\lambda}$.

cos CST. . . .	9.9781236 $+ \tau(18711) - \varpi(569)$
1 : *cos* λ.	0.0079097 $- \tau(6546) + \varpi(198)$
cos KST. . .	9.9860333 $+ \tau(12165) - \varpi(371)$

Commutat. KST =	$14° 27' 11''3 - \tau(37' 362) + \varpi(1' 139)$
Longit. de la terre. . .	$353\ 31\ 30$
Longit. hélioc. φ =	$7° 58' 41''3 - \tau(37' 362) + \varpi(1' 139)$

LI. Par ces calculs, on a déterminé l'anomalie ψ, la latitude

héliocentrique λ, et la longitude héliocentrique ψ de la comète pour le moment de l'observation du 15 septembre. On fera de semblables calculs pour les époques données du 14 août et du 2 décembre, et on aura les résultats suivans, dans lesquels on a distingué par l'accent ° ceux du 14 août, et par l'accent ′ ceux du 2 décembre.

14 août.	$\psi^{\circ} = 146^{\circ}\ 13'\ 52'' + \tau\,(3'453) - \pi\,(2'575)$
	$\varphi^{\circ} = 357\ 15\ 54.4 + \tau\,(10'482) + \pi\,(0'523)$
	$\log. \sin \lambda^{\circ} = 8.5267204 + \tau\,(18954) - \pi\,(945)$
15 septembre avant le périhélie.	$\psi = 132^{\circ}\ 22'\ 56''.8 + \tau\,(12'894) - \pi\,(3'885)$
	$\varphi = 7\ 58\ 41.3 - \tau\,(37'362) + \pi\,(1'139)$
	$\log. \sin \lambda = 9.2767605 - \tau\,(176446) + \pi\,(6363)$
2 décembre après le périhélie.	$\psi' = 146^{\circ}\ 39'\ 18'' - \tau\,(3'300) - \pi\,(2'440)$
	$\varphi' = 297\ 30\ 20.3 + \tau\,(4'780) + \pi\,(0'641)$
	$\log. \sin \lambda' = 9.7698879 + \tau\,(3730) + \pi\,(1188)$

LII. Concevons maintenant une sphère concentrique au soleil, dont la surface soit rencontrée par le plan de l'écliptique et par celui de l'orbite de la comète. Pour mieux saisir la situation respective des différens points, on pourra supposer que la circonférence de l'écliptique est développée sur un plan (fig. 5), et forme la ligne droite ☊ ☋ ☊ dans laquelle ♈ représente le premier point d'*aries*, ♈ ♋ l'ordre des signes, ☊ le nœud ascendant, et ☋ le nœud descendant de la comète. A chaque point de l'écliptique, comme K, on peut élever une perpendiculaire KC qui représente la latitude de la comète, en même temps que ♈K est sa longitude, et la suite des points C formera la ligne sinueuse ☊ C ☋ C ☊ qui représente l'intersection du plan de l'orbite avec la surface sphérique concentrique au soleil. Dans cette sorte de projection, les longitudes et les latitudes sont représentées par des grandeurs proportionnelles, mais les arcs du mouvement héliocentrique sont altérés dans

leurs proportions ; ils sont en général augmentés, puisque l'arc de courbe $\Upsilon C\Omega$ ne représente qu'une longueur égale à $\Upsilon\Omega$. Quoi qu'il en soit, cette figure est très-propre à diriger le calcul qui reste à faire pour la détermination de l'orbite.

La distance $\Upsilon\varpi$, supplément de la longitude du nœud ascendant Ω, est d'environ 5°. Au 14 août, la comète étoit à un point C° très-voisin du nœud descendant, puisque la distance ΥK°, complément à 360° de la longitude φ°, n'est que d'environ 3°. Au 15 septembre, la comète marchant vers le périhélie π, s'est trouvée en C avec la longitude ΥK d'environ 8°. Arrivée au périhélie π le 7 octobre, elle s'est trouvée distante d'environ 31° du nœud ascendant Ω. Continuant sa route, elle a passé le nœud, sa latitude est devenue boréale, et enfin le 2 décembre, elle est parvenue au point C' où l'on a $\Upsilon K' = 62° 30'$ environ, valeur de $360° - \varphi'$. Si l'orbite de la comète est exactement parabolique, il ne lui reste à parcourir du 2 décembre 1769 jusqu'à l'infini, que l'arc $C'\varpi$, $\pi\varpi$ étant égal à $\pi\Omega$. Si cette orbite est elliptique, elle continuera son mouvement jusqu'à sa prochaine apparition dans la partie $\varpi C^\circ C$, mais elle ne décrira qu'un angle très-petit dans un temps considérable.

LIII. Après avoir pris cette idée du mouvement héliocentrique de la comète, venons à la détermination tant des coëfficiens τ et σ que des divers élémens de l'orbite.

Suivant la méthode ordinaire, on considère le triangle sphérique formé par les deux points C°, C, et par le pôle de l'écliptique. Dans ce triangle, on connoît les côtés de l'angle au pôle, qui sont les complémens des latitudes $K^\circ C^\circ$, KC ; avec l'angle compris mesuré par l'arc $K^\circ K = 360° - \varphi^\circ + \varphi$: on peut donc déterminer le troisième côté $C^\circ C$ qui doit être égal à la différence des anomalies $\psi^\circ - \psi$, et de-là résulte l'équation de condition

$$\cos(\psi^\circ - \psi) = \cos(\varphi - \varphi^\circ) \cos\lambda \cos\lambda^\circ + \sin\lambda \sin\lambda^\circ. \quad (56)$$

On en obtiendra une semblable de la comparaison des deux lieux C° et C′, qui donne

$$\cos(\psi' + \psi) = \cos(\varphi' - \varphi)\cos\lambda\cos\lambda' - \sin\lambda\sin\lambda' ; \quad (56)$$

et par le moyen de ces deux équations, on pourra déterminer τ et ϖ.

Cette méthode paroît conduire assez directement au but ; mais elle a l'inconvénient de supposer que les trois points C°, C, C′ sont exactement dans un même plan, et elle n'offre pas les moyens de corriger ou au moins de diminuer l'erreur qui auroit lieu si cette condition n'étoit pas remplie.

le plan d'un grand cercle

On n'exprimeroit point la condition essentielle de l'unité du plan, en formant par la comparaison des points C et C′ une troisième équation semblable aux équations (55) et (56). En effet, cette troisième équation seroit nécessairement une suite des deux autres; car il faudroit que les deux plans C′C°, C°C fissent en C° un angle bien différent de 180°, pour que l'arc CC′ mené directement de C en C′, fût sensiblement plus petit que la somme des arcs C°C′, C°C. Voici donc le moyen qu'on pourroit employer.

[illegible handwritten marginal note]

LIV. On reconnoît que trois points C°, C, C′, sont dans le plan d'un même grand cercle, si les longitudes de ces points $\varphi^\circ, \varphi, \varphi'$ et leurs latitudes $\lambda^\circ, \lambda, \lambda'$ satisfont à l'équation

$$\sin(\varphi - \varphi^\circ)\tan\lambda' + \sin(\varphi' - \varphi)\tan\lambda^\circ + \sin(\varphi^\circ - \varphi')\tan\lambda = 0 ; \quad (57)$$

ou ce qui revient au même, si entre les anomalies ψ°, ψ, ψ', et les latitudes $\lambda^\circ, \lambda, \lambda'$, on a l'équation

$$\sin(\psi - \psi^\circ)\sin\lambda' + \sin(\psi' - \psi)\sin\lambda^\circ + \sin(\psi^\circ - \psi')\sin\lambda = 0. \quad (58)$$

Si donc on substitue les valeurs données dans l'article LI, en observant de prendre λ° et ψ° négativement, on aura une troisième équation, laquelle devra être combinée avec les équations (55) et (56), afin d'en tirer des valeurs de τ et de ϖ, qui y satisfassent *aussi bien qu'il est possible.* Je dis

aussi bien qu'il est possible, parce qu'ayant trois équations pour déterminer deux inconnues, on ne doit pas prétendre satisfaire exactement à ces trois équations, mais seulement chercher à rendre leurs premiers membres très-petits.

LV. Connoissant τ et ϖ, toutes les quantités contenues dans le tableau de l'art. LI deviendront entièrement déterminées ; on calculera ensuite l'inclinaison I par la formule

$$\cos \mathrm{I} = \frac{\sin\,(\varphi - \varphi^\circ)}{\sin\,(\psi^\circ - \psi)}\cos\lambda\cos\lambda^\circ, \quad (59)$$

où l'on aura soin de prendre $\psi^\circ - \psi$ (qui représente la distance CC°) de même signe que $\varphi - \varphi^\circ$, parce que l'inclinaison est toujours supposée moindre que 90°. Lorsque I sera déterminé, on aura la longitude du nœud S par la formule

$$\sin(\varphi - \mathrm{S}) = \tang\lambda\cos\mathrm{I}. \quad (60)$$

Cette équation, dans laquelle λ doit toujours être regardé comme positif, donnera pour l'angle $\varphi - \mathrm{S}$ deux valeurs comprises entre 0° et 180°; on en tirera donc deux valeurs de S. L'équation $\sin(\varphi^\circ - \mathrm{S}) = \tang\lambda^\circ\cos\mathrm{I}$, qui a lieu semblablement, donnera de même deux valeurs pour S. On aura enfin la troisième équation $\sin(\mathrm{S} - \varphi') = \tang\lambda'\cos\mathrm{I}$ (où l'on a changé le signe du premier membre, afin de prendre positivement la latitude λ', qui est de signe contraire aux deux autres λ, λ°), d'où résulteront encore deux valeurs de S. Or, dans chaque système, il est nécessaire que la même valeur de S se retrouve, ou exactement ou au moins, à une petite différence près ; cette différence venant de ce qu'on n'a pas pu satisfaire exactement aux trois équations qui déterminent τ et ϖ. On prendra donc un milieu entre ces trois valeurs de S, peu différentes entre elles, et on aura la longitude d'un nœud auquel on appliquera la règle de l'art. XXV, pour savoir si c'est le nœud descendant ou le nœud ascendant.

Par les valeurs connues de l'anomalie ψ et de la distance

périhélie Π, on trouvera aisément l'instant du passage au périhélie ; le signe positif ou négatif de $\varphi - \varphi^{\circ}$, indiquera si le mouvement est direct ou rétrograde ; enfin le lieu du périhélie se déterminera par les formules de l'art. XXVI. Ainsi la connoissance de tous les élémens de l'orbite se déduit aisément de la résolution des trois équations (55), (56) et (57) ou (58), qui donnent les coëfficiens τ et ν.

Nous ne faisons qu'indiquer cette méthode sans l'appliquer à notre exemple, parce que, quoique sa marche soit assez naturelle, cependant elle a l'inconvénient de ne pas réduire les erreurs à une même échelle. Deux erreurs égales dans deux des trois équations que l'on considère pourroient répondre à des erreurs très-inégales sur les longitudes ou sur les latitudes ; et c'est ce qu'il faut éviter. Nous allons donc exposer une autre méthode qui paroît devoir mieux remplir notre but.

LVI. Supposons que par les formules précédentes ou par une première connoissance approchée des élémens de l'orbite, on ait trouvé $I = 40^{\circ}\ 50'$, $S = 355^{\circ}\ 3'$ (c'est le lieu du nœud descendant), et υC ou $\sigma = 16^{\circ}\ 48'$.

Appelons pour abréger x la quantité $\varphi - S$, ou le côté υK du triangle sphérique rectangle υKC, on aura dans ce triangle les deux équations

$$\sin \lambda = \sin I \sin \sigma \qquad (61)$$

$$\tang x = \cos I \tang \sigma . \qquad (62)$$

Nous prendrons pour valeurs corrigées de I et de σ les deux expressions

$$I = 40^{\circ}\ 50' + z\,(6'000)$$
$$\sigma = 16^{\circ}\ 48' + u\,(5'000)\,;$$

et par leur substitution dans l'équation (61), on aura

$\sin I \ldots\ldots\ 9.8154854 + z\,(7300)$

$\sin \sigma \ldots\ldots\ 9.4609456 + u\,(20920)$

$\sin \lambda \ldots\ldots\ 9.2764310 + z\,(7300) + u\,(20920)$.

Comparant ce log. sinus à celui de l'art. LI, on a la différence

$$-3295 + z(7300) + u(20920) + \tau(176446) - \varpi(5363),$$

d'où résulte sur la latitude λ l'erreur

$$E' = -0'500 + z(1'113) + u(3'189) + \tau(26'900) - \varpi(0'818).$$

Calculant de même les deux formules $\sin\lambda^{\circ} = \sin I \sin\sigma^{\circ}$, $\sin\lambda' = \sin I \sin\sigma'$, d'après les valeurs $\sigma^{\circ} = \ldots$, $\sigma' = 360^{\circ}$ [illegible], on trouvera deux valeurs de $\log\sin\lambda^{\circ}$, et $\log\sin\lambda'$, lesquelles comparées aux valeurs semblables déjà trouvées (art. LI), donneront sur les angles λ°, λ' les erreurs

$$E''' = 0'125 + z(0'194) + u(3'264) + \tau(5'637) - \varpi(0'836)$$
$$E'''' = -0'123 + z(4'208) - u(1'761) - \tau(5'529) + \varpi(2'154).$$

Maintenant le calcul de l'équation $\tan x = \cos I \tan\sigma$, donnera

$$\begin{array}{ll} \cos I \ldots\ldots & 9.8788748 - z(5460) \\ \tan\sigma \ldots\ldots & 9.4798887 + u(22830) \\ \hline \tan x \ldots\ldots & 9.3587635 - z(5460) + u(22830) \end{array}$$

$$x = 21^{\circ}52'\ 3''4 - z(0'938) + u(3'923)$$

$$\text{d'ailleurs } \varphi = 7^{\circ}58'41.3 - \tau(37'362) + \varpi(1'139)$$

$$\text{donc } -S \text{ ou } \Upsilon\upsilon = 4^{\circ}53'22''1 - z(0'938) + u(3'923) + \tau(37'362) - \varpi(1''139)$$

Les deux équations $\tan x^{\circ} = \cos I \tan\sigma^{\circ}$ et $\tan x' = \cos I \tan\sigma'$, donneront semblablement

$$\Upsilon\upsilon = 4^{\circ}58'\ 7''5 - z(0'168) + u(3'787) + \tau(3'331) - \varpi(0'469)$$
$$\Upsilon\upsilon = 5^{\circ}\ 4'\ 28''5 + z(1'961) + u(5'789) + \tau(6'320) + \varpi(7'680).$$

La seconde valeur de $\Upsilon\upsilon$ étant retranchée successivement de la première et de la troisième, on aura deux nouvelles différences ou erreurs,

$$E^{\text{IV}} = -4'757 - z(8'770) + u(0'136) + \tau(40'693) - \varpi(0'670)$$
$$E^{\text{V}} = 6'350 + z(2'129) + u(2'002) + \tau(9'659) - \varpi(7'211).$$

LVII. Toutes les conditions du problème étant ainsi exprimées, si on vouloit anéantir à la fois les cinq erreurs E', E'',

E''', E^{iv}, E^{v}, on auroit une équation de plus que d'inconnues, ainsi que le comporte la nature de la question. Mais comme ce ne seroit que par un hasard singulier que les valeurs des inconnues z, u, τ, ϖ, tirées de quatre de ces équations, satisferoient à la cinquième, et que même dans ce cas, la méthode que nous devons suivre conduiroit au vrai résultat, nous tâcherons seulement de diminuer les erreurs de manière à avoir la parabole qui satisfait le plus exactement qu'il est possible aux trois observations données.

Nous commencerons donc par déterminer τ et ϖ par la condition que les erreurs E^{iv} et E^{v} soient nulles ; ce qui donnera

$$\tau = 0.1344 + z(0.0243) + u(0.0013)$$
$$\varpi = 1.0605 + z(0.3278) + u(0.2793).$$

Substituant ces valeurs dans les trois quantités E', E'', E''', on aura

$$E' = 2'.248 + z(1'.499) + u(2'.996)$$
$$E'' = 0'.006 + z(0'.059) + u(3'.040)$$
$$E''' = 1'.418 + z(4'.780) - u(1'.167).$$

On voit déjà qu'en faisant z et u égaux à zéro, toutes les erreurs se réduiront à deux; l'une E' d'environ $2'\frac{1}{4}$, l'autre E''' de $1'42$; erreurs très-tolérables dans la théorie des comètes. Mais il est possible de les atténuer encore en cherchant le *minimum* de la somme des quarrés des quantités E', E'', E'''.

LVIII. Pour cela, il faut multiplier tous les termes de E' par 1.499 coëfficient de z, tous ceux de E'' par 0.059, tous ceux de E''' par 4.780, et ajouter les trois produits. Opérant ensuite de la même manière par rapport aux coëfficiens de u, on formera les deux équations,

$$0 = 10.148 + z(25.099) - u(0.908)$$
$$0 = 5.098 - z(0.908) + u(19.580);$$

d'où l'on tire

$$z = -0.4144$$
$$u = -0.2796.$$

Au moyen de ces valeurs, les trois erreurs E', E", E''', deviennent

$$E' = 0'789\,, \quad E'' = -0'868\,, \quad E''' = -0'236\,;$$

de sorte que la plus grande ne va pas à une minute.

Substituant ces valeurs de x et u dans celles de τ et de ϖ, on aura

$$\tau = 0.1240$$
$$\varpi = 0.8466\,;$$

d'où résulte le log. de la distance périhélie $= 0.0908466$, et l'époque du passage au périhélie : octobre 7,5310.

Des valeurs trouvées pour z et u, on déduit l'inclinaison $I = 40^\circ\ 47'\ 55''7$, et la distance σ ou $\mho C = 16^\circ\ 46'\ 36''1$. Ajoutant à $\mho C$ l'anomalie $\psi = 132^\circ\ 22'\ 56''8 + \tau\,(12'894) - \varpi\,(3'885) = 132^\circ\ 21'\ 15''4$, et retranchant la somme de 180°, on aura la distance du périhélie au nœud $\Pi\Omega = 30^\circ\ 52'\ 8''5$. Enfin par l'une des expressions de $\Upsilon\mho$ on trouve $\Upsilon\mho = 4^\circ\ 56'\ 19''6$; ce qui donne la longitude du nœud ascendant $175^\circ\ 3'\ 40''4$.

Si de cette longitude on retranche la distance $\Pi\Omega$ du périhélie au nœud, il restera ce que les astronomes appellent le lieu du périhélie $= 144^\circ\ 11'\ 31''\ 9$.

LIX. On peut donc établir ainsi les élémens de l'orbite de la comète de 1769, en tant qu'ils résultent des trois observations données :

Log. dist. périhélie.................		9.0908466
Lieu du nœud ascendant...........		175° 3' 40"
Inclinaison de l'orbite.............		40 47 56
Lieu du périhélie....................		144 11 32
Passage au périhélie........	*octobre*	7.5310
Sens du mouvement................		*direct.*

Si d'après ces élémens, on calcule la longitude et la latitude géocentriques de la comète à l'instant de chaque observation, on trouvera les résultats suivans :

Temps moyen à Paris.	*Longitude calculée.*	*Longitude observée.*	*Diff.*	*Latitude calculée.*	*Latitude observée.*	*Diff.*
Août. 14.52352	39° 58′ 22″	39° 58′ 16″	+ 6″	3° 15′ 44″	3° 17′ 13″	— 89″
Sept. 15.69398	140 39 14	140 39 17	— 3″	22 44 51	22 43 34	+ 77
Déc. 2.21413	276 41 22	276 41 20	+ 2″	23 33 16	23 33 25	— 9

où l'on voit que les erreurs sont insensibles sur la longitude, et ne vont qu'à 1′ ½ sur la latitude.

Les élémens trouvés par Pingré, d'après les mêmes observations (Cométographie, tome II, page 381), représentent bien les observations extrêmes du 14 août et du 2 décembre; mais sur l'observation du 15 septembre, ils donnent une erreur de + 2′ 11″ sur la longitude, et une de + 2′ 37″ sur la latitude.

LX. Au reste, si d'après les élémens que nous avons trouvés, ou d'après ceux de Pingré, on calculoit les lieux de la comète pour d'autres époques où elle a été observée, on trouveroit des erreurs de 12 ou 15 minutes et même plus, tant sur la longitude que sur la latitude. C'est par cette raison que Pingré lui-même trouve différentes orbites en calculant différentes observations; tantôt il trouve l'inclinaison de 40° 48′ 29″, tantôt il la trouve de 40° 42′ 26″, et ainsi des autres élémens.

Il n'y a rien à conclure de-là contre l'exactitude des calculs d'après lesquels nous venons de déterminer l'orbite de la comète de 1769; ces calculs donnent, entre toutes les paraboles possibles, l'une de celles qui satisfont le mieux aux trois observations données. Mais il est possible, et il paroît même très-probable, d'après ces différences, que la vraie orbite de la comète de 1769 n'est point une parabole. Il faudroit discuter de nouveau les observations de cette comète, choisir les plus exactes après les avoir corrigées de l'aberration et de la parallaxe, et alors on pourroit essayer de déterminer l'ellipse ou l'hypor-

bole qui est la vraie trajectoire. Le calcul ne seroit pas beaucoup plus compliqué que les précédens; il y entreroit l'élément de plus $\frac{1}{a}$, et trois observations suffiroient toujours pour résoudre le problème; mais il seroit bon d'en faire entrer au moins quatre en comparaison.

Observations sur la méthode précédente.

LXI. Pour avoir une idée nette de la méthode que nous proposons, et dont nous avons détaillé les calculs dans un exemple, il faut observer qu'elle est composée de quatre parties distinctes.

Première partie. Après avoir représenté le logarithme de la distance périhélie, et l'instant du passage au périhélie par deux expressions contenant chacune une correction indéterminée, on calcule, d'après ces valeurs, l'anomalie ψ et le rayon vecteur r pour le moment de chaque observation.

Seconde partie. Connoissant tout à-la-fois le rayon vecteur, la longitude et la latitude de la comète données par l'observation, la longitude du soleil et sa distance à la terre données par les tables, on calcule la longitude et la latitude héliocentriques de la comète; et pour cet effet, il est bon de construire une figure qui représente à-peu-près les positions respectives des différens points, et qui aidera le plus souvent à fixer l'indétermination que présente dans certains cas le triangle CTS dans lequel on connoît deux côtés, et l'angle opposé à l'un d'eux.

Le résultat de ces deux premières opérations, dont on peut former un petit tableau, donnera, pour l'instant de chaque observation, l'anomalie ψ, la longitude héliocentrique φ, et le *log. sinus* de la latitude héliocentrique λ. Il faut ensuite procéder à la détermination du plan de l'orbite et de la position du périhélie.

Troisième partie. Ayant représenté l'écliptique par une ligne droite, et l'orbite de la comète, vue du soleil, par une ligne sinueuse; on marquera sur celle-ci les différens lieux de la comète, d'après les longitudes et latitudes héliocentriques déjà calculées. On y marquera également le lieu du périhélie qu'on doit déjà connoître d'une manière approchée par l'une des anomalies. On donnera ensuite des valeurs en partie connues, en partie indéterminées, à l'inclinaison I, et à la distance σ de la comète à l'un des nœuds lors de l'observation moyenne. Au moyen de ces valeurs, on calculera la latitude λ, et la quantité x (qui n'est autre chose que la distance σ réduite à l'écliptique) par les formules $\sin \lambda = \sin I \sin \sigma$, $\tang x = \cos I \tang \sigma$. La comparaison du *log. sin* λ, avec celui qu'on a déjà trouvé dans la seconde partie, donne une première erreur E' sur l'angle λ; on en trouve une pareille sur les deux autres latitudes, ce qui fait trois erreurs E', E'', E'''.

Quatrième partie. Des trois valeurs de x correspondantes aux trois observations, on déduit trois expressions de la longitude du nœud, qui égalées entre elles fournissent deux équations entre les quatre coëfficiens inconnus. Tirant de ces équations les valeurs de deux des coëfficiens, et les substituant dans l'expression des trois quantités E', E'', E''', il ne restera plus qu'à faire en sorte que la somme des quarrés de ces trois quantités soit un *minimum*. De-là résultent deux équations qui achèvent de déterminer tous les coëfficiens, et par suite tous les élémens de l'orbite.

LXII. On pourra procéder de même, si on veut combiner ensemble plus de trois observations; mais alors il conviendra d'établir deux systêmes d'erreurs. Le premier comprendra toutes les erreurs E', E'', E''', &c. relatives aux latitudes; le second comprendra toutes les erreurs de la position du nœud; si par les diverses valeurs de x calculées aux époques des différentes observations, on trouve, pour la longitude du nœud,

les diverses valeurs S', S'', S''', &c.; et qu'on appelle $S'+e'$ la vraie longitude S du nœud, on aura les erreurs successives $e'=e'$, $e''=e'+S'-S''$, $e'''=e'+S'-S'''$, &c., en nombre égal à celui des observations, et e' sera une indéterminée nouvelle à joindre aux quatre déjà employées. Dans le système des erreurs e', e'', e''', &c., on déterminera e' avec deux des autres inconnues, de manière que la somme des quarrés de ces erreurs soit un *minimum*; on aura ainsi l'expression des trois inconnues en fonction des deux autres, et la substitution de ces valeurs étant faite dans les quantités E', E'', E''', &c. du premier système, il n'y restera plus que deux inconnues. On déterminera enfin ces deux inconnues, par la condition que la somme des quarrés des erreurs E', E'', E''', &c. soit un *minimum*, et on en déduira les élémens de l'orbite.

Il seroit plus direct de donner des valeurs en partie connues, en partie indéterminées, aux cinq élémens de l'orbite, et ensuite de calculer pour le moment de chaque observation, la longitude et la latitude géocentriques de la comète. On compareroit les longitudes et les latitudes calculées avec les longitudes et les latitudes observées, ce qui donneroit pour chaque observation deux différences ou erreurs, et on égaleroit ensuite à un *minimum* la somme des quarrés de toutes ces erreurs. Mais le calcul conduit de cette manière seroit plus long que celui que nous avons indiqué, et il n'en résulteroit qu'un avantage assez petit pour la diminution des erreurs, à cause du peu de variation que subissent les quantités lorsqu'elles sont voisines du *minimum*.

Observations sur le calcul des corrections indéterminées.

LXIII. Les tables de logarithmes contiennent tout ce qui est nécessaire pour le calcul des corrections indéterminées, ainsi qu'on l'a vu dans les exemples précédens. Cependant il est bon de remarquer qu'on peut calculer dans tous les cas les

coëfficiens des corrections, sans recourir aux différences des tables qui sont toujours affectées de quelqu'erreur. Voici quelques préceptes à ce sujet.

Si l'on demande le logarithme du nombre $a+bx$, dans lequel bx est une correction toujours supposée très-petite par rapport à a, le logarithme cherché sera, $log. a + x\left(\frac{bm}{a}\right)$, m étant le module 0.43429, &c. Mais comme les logarithmes ont ordinairement sept décimales, pour que la correction soit exprimée en unités décimales du septième ordre, il faudra, au lieu de m, mettre $M = 4342945$, dont le log. est 6.6377843, et on aura $log. (a+bx) = a + x\left(\frac{bM}{a}\right)$.

Réciproquement, ayant $log. y = log. a + x(b)$, on en tire le nombre $y = a + x\left(\frac{ab}{M}\right)$.

Si bx représente un nombre de minutes servant de correction à l'arc a; et qu'on appelle n le nombre constant $\frac{10^7.m}{r'}$, (r' étant le nombre de minutes comprises dans le rayon), dont le logarithme est 3.1015104, on aura

$$log\ sin\ (a+bx) = log\ sin\ a + x\,(nb\ cot.\ a)$$
$$log\ cos\ (a+bx) = log\ cos\ a - x\,(nb\ tang\ a)$$
$$log\ tang\,(a+bx) = log\ tang\ a + x\left(\frac{nb}{sin\ a\ cos\ a}\right)$$
$$log\ cot.\ (a+bx) = log\ cot.\ a - x\left(\frac{nb}{sin\ a\ cos\ a}\right)$$

formules où les quantités qui multiplient x sont réduites en unités décimales du septième ordre, de même que les logarithmes. Réciproquement si on a

$log\ sin\ y = log\ sin\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a + x\left(\frac{c}{n}\,tang\ a\right)$

$log\ cos\ y = log\ cos\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a - x\left(\frac{c}{n}\,cot.\ a\right)$

$log\ tang\ y = log\ tang\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a + x\left(\frac{c}{n}\,sin\ a\ cos\ a\right)$

$log\ cot.\ y = log\ cot.\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a - x\left(\frac{c}{n}\,sin\ a\ cos\ a\right)$

la correction ajoutée à la valeur de a étant exprimée en minutes.

Il est souvent utile de trouver le *log. cosinus*, lorsqu'on a le *log. sinus*, ou *vice versâ*, sans être obligé de chercher l'arc. Or par les formules précédentes si l'on a

$log\ sin\ y = log\ sin\ a + x\,(c)$, il en résulte $log\ cos\ y = log\ cos\ a - x\,(c\ tang^2\ a)$
$log\ cos\ y = log\ cos\ a + x\,(c)$, il en résulte $log\ sin\ y = log\ sin\ a - x\,(c\ cot.^2\ a)$

Avec ces formules et autres semblables, qu'on peut employer suivant les circonstances, on s'habituera aisément au calcul des corrections indéterminées qui peut être fort utile dans toutes sortes d'approximations.

APPENDICE.

Sur la Méthode des moindres quarrés.

Dans la plupart des questions où il s'agit de tirer des mesures données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

dans lesquelles $a, b, c, f,$ &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'une équation à l'autre, et $x, y, z,$ &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite.

Si l'on a autant d'équations que d'inconnues $x, y, z,$ &c., il n'y a aucune difficulté pour la détermination de ces inconnues, et on peut rendre les erreurs E absolument nulles. Mais le plus souvent, le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, et il est impossible d'anéantir toutes les erreurs.

Dans cette circonstance, qui est celle de la plupart des problèmes physiques et astronomiques, où l'on cherche à déterminer quelques élémens importans, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des erreurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut sur-tout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible.

De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre

minimum la somme des quarrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

La somme des quarrés des erreurs $E^2 + E'^2 + E''^2 +$ &c. étant

$$\begin{aligned}&(a + bx + cy + fz + \&c.)^2\\ +&(a' + b'x + c'y + f'z + \&c.)^2\\ +&(a'' + b''x + c''y + f''z + \&c.)^2\\ +&\&c.;\end{aligned}$$

si l'on cherche son *minimum*, en faisant varier x seule, on aura l'équation

$$o = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \&c.,$$

dans laquelle par $\int ab$ on entend la somme des produits semblables $ab + a'b' + a''b'' +$ &c.; par $\int b^2$ la somme des quarrés des coëfficiens de x, savoir $b^2 + b'^2 + b''^2 +$ &c., ainsi de suite.

Le *minimum*, par rapport à y, donnera semblablement

$$o = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int fc + \&c.,$$

et le *minimum* par rapport à z,

$$o = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \&c.,$$

où l'on voit que les mêmes coëfficiens $\int bc$, $\int bf$, &c. sont communs à deux équations, ce qui contribue à faciliter le calcul.

En général, *pour former l'équation du* minimum *par rapport à l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coëfficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faire une somme de tous ces produits.*

On obtiendra de cette manière autant d'équations du *minimum*, qu'il y a d'inconnues, et il faudra résoudre ces équations par les méthodes ordinaires. Mais on aura soin d'abréger tous les calculs, tant des multiplications que de la résolution, en n'admettant dans chaque opération que le nombre de chiffres

entiers ou décimaux que peut exiger le degré d'approximation dont la question est susceptible.

Si par un hasard singulier, il étoit possible de satisfaire à toutes les équations en rendant toutes les erreurs nulles, on obtiendroit également ce résultat par les équations du *minimum*; car si après avoir trouvé les valeurs de x, y, z, &c. qui rendent nulles E, E', &c., on fait varier x, y, z, &c. de δx, δy, δz, &c., il est évident que E^2 qui étoit zéro deviendra par cette variation $(a\delta x + b\delta y + c\delta z, \&c.)^2$. Il en sera de même de E'^2, E''^2, &c. D'où l'on voit que la somme des quarrés des erreurs aura pour variation une quantité du second ordre par rapport à δx, δy, &c.; ce qui s'accorde avec la nature du *minimum*.

Si après avoir déterminé toutes les inconnues x, y, z, &c., on substitue leurs valeurs dans les équations proposées, on connoîtra les diverses erreurs E, E', E'', &c. auxquelles ce système donne lieu, et qui ne peuvent être réduites sans augmenter la somme de leurs quarrés. Si parmi ces erreurs il s'en trouve que l'on juge trop grandes pour être admises, alors on rejettera les équations qui ont produit ces erreurs, comme venant d'expériences trop défectueuses, et on déterminera les inconnues par le moyen des équations restantes, qui alors donneront des erreurs beaucoup moindres. Et il est à observer qu'on ne sera pas obligé alors de recommencer tous les calculs; car comme les équations du *minimum* se forment par l'addition des produits faits dans chacune des équations proposées, il suffira d'écarter de l'addition les produits donnés par les équations qui auront conduit à des erreurs trop considérables.

La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très-simple de notre méthode générale, que nous appellerons *Méthode des moindres quarrés*.

En effet, si l'expérience a donné diverses valeurs a', a'', a''', &c.

pour une certaine quantité x, la somme des quarrés des erreurs sera $(a'-x)^2 + (a''-x)^2 + (a'''-x)^2 + \&c.$, et en égalant cette somme à un *minimum*, on a

$$0 = (a'-x) + (a''-x) + (a'''-x) + \&c.;$$

d'où résulte $x = \frac{a' + a'' + a''' + \&c.}{n}$, n étant le nombre des observations.

Pareillement, si pour déterminer la position d'un point dans l'espace, on a trouvé, par une première expérience, les coordonnées a', b', c'; par une seconde, les coordonnées a'', b'', c'', &c. ainsi de suite; soient x, y, z, les véritables coordonnées de ce point : alors l'erreur de la première expérience sera la distance du point (a', b', c') au point (x, y, z); le quarré de cette distance est

$$(a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2;$$

et la somme des quarrés semblables étant égalée à un *minimum*, on en tire trois équations qui donnent $x = \frac{\int a}{n}$, $y = \frac{\int b}{n}$, $z = \frac{\int c}{n}$, n étant le nombre des points donnés par l'expérience. Ces formules sont les mêmes par lesquelles on trouveroit le centre de gravité commun de plusieurs masses égales, situées dans les points donnés ; d'où l'on voit que le centre de gravité d'un corps quelconque jouit de cette propriété générale.

Si on divise la masse d'un corps en molécules égales et assez petites pour être considérées comme des points, la somme des quarrés des distances des molécules au centre de gravité sera un minimum.

On voit donc que la méthode des moindres quarrés fait connoître, en quelque sorte, le centre autour duquel viennent se ranger tous les résultats fournis par l'expérience, de manière à s'en écarter le moins qu'il est possible. L'application que nous allons faire de cette méthode à la mesure de la méridienne, achèvera de mettre dans tout son jour sa simplicité et sa fécondité.

Application à la mesure des degrés du méridien.

Supposant que le méridien est une ellipse dont les axes sont dans le rapport de 1 à $1+\alpha$, si on désigne par D la longueur du 45ème degré; et par S celle de l'arc compris entre les deux latitudes L et L', on aura par les formules connues, et en exprimant L' — L en degrés :

$$S = D(L'-L) - \tfrac{3}{2}\alpha D.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L);$$

d'où résulte

$$L'-L = \frac{S}{D} + \tfrac{3}{2}\alpha.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L).$$

Comme le 45ème degré est d'environ 28500 modules, égaux chacun à deux toises, on peut faire $\frac{1}{D} = \frac{1+\varepsilon}{28500}$, ε étant une fraction très-petite, et on aura

$$L'-L = \frac{S}{28500} + \varepsilon.\frac{S}{28500} + \alpha.\frac{270}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L), \quad (a)$$

équation qui pour chaque arc dont on connoît la longueur avec la latitude de ses extrémités, donnera une relation entre α et ε.

Voici maintenant les longueurs des différens arcs de la méridienne de France et les latitudes des parallèles qui les séparent, telles qu'elles résultent de l'opération exécutée par les célèbres astronomes Delambre et Méchain.

Lieu de l'observation.	*Sa latitude.*	*Arcs compris exprimés en modules.*	L' — L	L' + L
Dunkerque......	51° 2' 10" 50			
		DP 62472.59	2° 11' 20" 75	99° 53' 0"
Panthéon à Paris	48 50 49.75			
		PE 76145.74	2 40 7.25	95 1 32
Evaux............	46 10 42.50			
		EC 84424.55	2 57 48.10	89 23 37
Carcassonne.....	43 12 54.40			
		CM 52749.48	1 51 9.60	84 34 39
Montjouy.......	41 21 44 80			

Nous avons donc quatre arcs dont les mesures étant substituées successivement dans l'équation (*a*), fourniront quatre équations entre α et C. Mais comme ces quatre équations ne peuvent pas être satisfaites toutes à-la-fois, nous supposerons qu'elles ont lieu, en attribuant une certaine erreur à la latitude de chaque lieu, et nous appellerons E′, E″, &c. les corrections additives aux latitudes de Dunkerque, du Panthéon, &c. Ces erreurs n'entrent que dans le premier membre de chaque équation : elles sont trop petites pour affecter le terme multiplié par α dans le second membre. Voici donc les équations qui résultent des quatre arcs mesurés dans l'opération de la méridienne,

$$\begin{aligned}
E' - E'' &= 0.002923 + \mathsf{C}(2.192) - \alpha(0.563)\\
E'' - E''' &= 0.003100 + \mathsf{C}(2.672) - \alpha(0.351)\\
E''' - E^{\text{IV}} &= -0.001096 + \mathsf{C}(2.962) + \alpha(0.047)\\
E^{\text{IV}} - E^{\text{V}} &= -0.001808 + \mathsf{C}(1.851) + \alpha(0.263)
\end{aligned}$$

Comme il importe de considérer les erreurs séparément, on regardera comme une nouvelle inconnue l'erreur E‴, par exemple, et on aura les cinq équations :

$$\begin{aligned}
E' &= E''' + 0.006023 + \mathsf{C}(4.864) - \alpha(0.914)\\
E'' &= E''' + 0.003100 + \mathsf{C}(2.672) - \alpha(0.351)\\
E''' &= E''' && (b)\\
E^{\text{IV}} &= E''' + 0.001096 - \mathsf{C}(2.962) - \alpha(0.047)\\
E^{\text{V}} &= E''' + 0.002904 - \mathsf{C}(4.813) - \alpha(0.310)
\end{aligned}$$

Il faut maintenant faire en sorte que la somme des quarrés de ces cinq erreurs soit un *minimum*, et d'abord cette condition exprimée par rapport à l'inconnue E‴ dont tous les coëfficiens sont 1, donne par l'addition de toutes ces équations :

$$0 = 5E''' + 0.013123 - \mathsf{C}(0.239) - \alpha(1.622)$$
$$\text{donc } E''' = -0.002625 + \mathsf{C}(0.048) + \alpha(0.324).$$

Substituant cette valeur dans les cinq équations (*b*), on aura

$$E' = \quad 0.003398 + \varepsilon(4.912) - \alpha(0.590)$$
$$E'' = \quad 0.000475 + \varepsilon(2.720) - \alpha(0.087)$$
$$E''' = -0.002625 + \varepsilon(0.048) + \alpha(0.324) \qquad (e)$$
$$E^{\text{IV}} = -0.001639 - \varepsilon(2.914) + \alpha(0.177)$$
$$E^{\text{V}} = \quad 0.000279 - \varepsilon(4.765) + \alpha(0.014)$$

Pour exprimer ensuite la condition du *minimum* par rapport à ε, il faut multiplier la première équation par 4,912 coëfficient de ε; la seconde, par 2.720; la troisième, par 0.048; la quatrième, par $-$ 2.914; la cinquième, par $-$ 4.765, et égaler à zéro la somme de tous les produits. On opérera semblablement par rapport à α, et on aura les deux équations :

$$\begin{aligned} 0 &= \quad 0.020983 + \varepsilon(62.726) - \alpha(3.830) \\ 0 &= - 0.003287 - \varepsilon(\ 3.830) + \alpha(0.531) \end{aligned} \qquad (d)$$

d'où l'on tire $\alpha = 0.00675$, et $\varepsilon = 0.0000778$; donc

$$\text{l'aplatissement } \alpha = \frac{1}{148}$$

$$\text{et le } 45^{\text{ème}} \text{ degré } D = \frac{28500}{1+\varepsilon} = 28497.78.$$

L'aplatissement déterminé par la longueur du pendule et par quelques phénomènes astronomiques, n'est que de $\frac{1}{320}$, et le 45ème degré tel qu'on l'a déduit de la comparaison des mesures faites en France avec les mesures faites au Pérou, est de 28504.10. C'est sur ce dernier résultat qu'est fondée la détermination définitive du mètre : il devroit être diminué d'environ un 4500ème, si on s'en tenoit aux seules mesures exécutées en France; mais l'aplatissement $\frac{1}{148}$ trop peu d'accord avec celui que l'on connoît par d'autres phénomènes, ne permet pas d'adopter ce dernier parti.

Les valeurs trouvées pour α et ε, déterminent l'ellipse qui satisfait aussi exactement qu'il est possible aux mesures de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelonne. Cette ellipse est beaucoup plus aplatie que celle qui convient à la

figure générale du globe; elle suppose dans les latitudes observées des erreurs que l'on déterminera en substituant les valeurs trouvées pour α et β, dans les expressions de E′, E″, &c. : on trouvera, en réduisant ces erreurs en secondes,

$$E' = -0''73,\ E'' = 1''83,\ E''' = -1''55,\ E^{iv} = 0''42,\ E^{v} = 0''03.$$

La plus grande de toutes ne monte pas à 2″, et la moyenne, sans égard aux signes, n'est que de 0″91.

Si au lieu de chercher les deux quantités α et β qui conviennent au *minimum* absolu, on commence par faire la quantité α égale à l'aplatissement connu $\frac{1}{320}$, les équations (c) deviendront

$$\begin{aligned} E' &= 0.001554 + \beta(4.912) \\ E'' &= 0.000391 + \beta(2.720) \\ E''' &= -0.001612 + \beta(0.048) \\ E^{iv} &= -0.000663 - \beta(2.914) \\ E^{v} &= 0.000323 - \beta(4.765) \end{aligned}$$

et on aura pour l'équation du *minimum*, $0 = 0.009010 + \beta(62.726)$, d'où résulte $\beta = -0.0001436$; donc

$$\text{le } 45^{\text{ème}} \text{ degré} = 28500\,(1 - \beta) = 28504.09\,;$$

ce qui s'accorde suffisamment avec la détermination adoptée ; mais alors les erreurs E′, E″, &c. exprimées en secondes, deviennent

$$E' = 3''06,\ E'' = 0''00,\ E''' = -5''83,\ E^{iv} = -0''88,\ E^{v} = 3''62.$$

Ces erreurs sont plus fortes qu'elles n'étoient dans le cas du *minimum* absolu ; la plus grande tombe sur la latitude d'Evaux, et la moindre, qui est même entièrement nulle, sur celle du Panthéon.

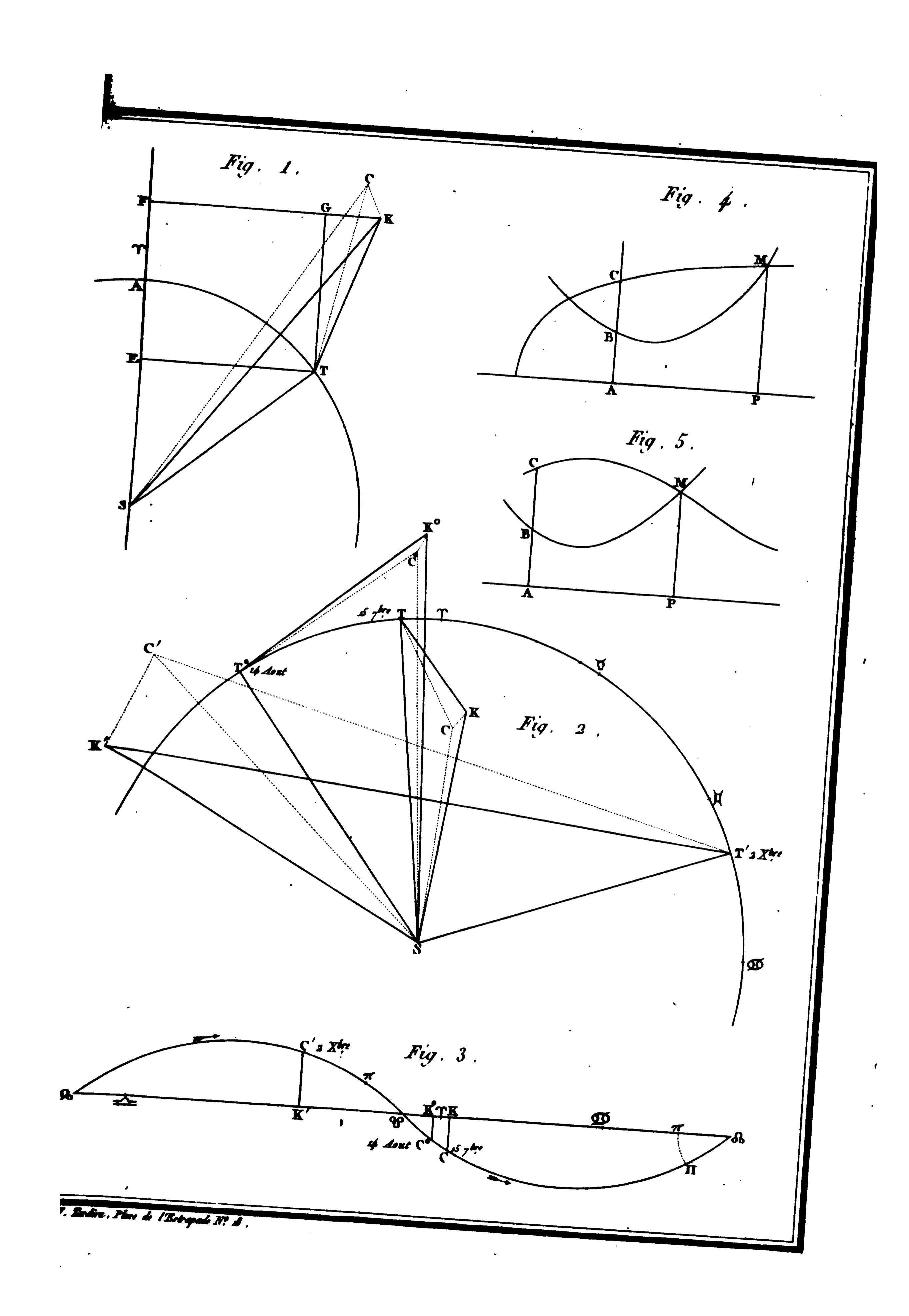
Au reste, les anomalies dans les latitudes, qui sans aucun doute ne doivent point être attribuées aux observations, tiennent vraisemblablement à des attractions locales qui agissent irrégulièrement sur le fil à plomb. Il suffit, pour cela, d'un défaut d'homogénéité dans les couches qui avoisinent le point où l'on

observe la latitude ; et la même cause qui rapproche le zénith apparent du midi ou du nord, peut aussi le détourner de quelques secondes vers l'est ou vers l'ouest ; ce qui explique les inégalités qu'on a aussi observées dans les azimuths.

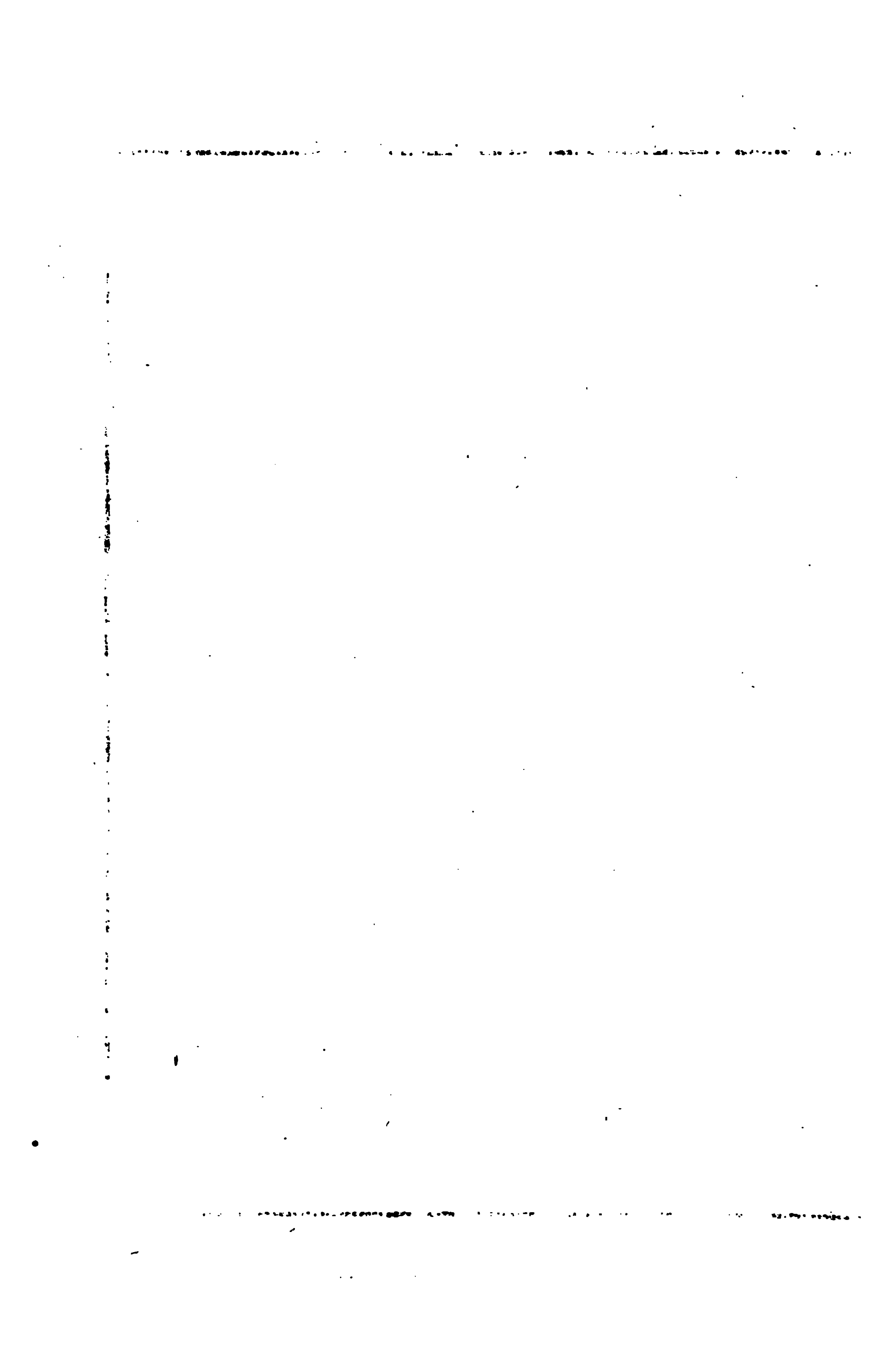
Il résulte de l'existence bien constatée de ces anomalies, que la longueur des arcs du méridien est moins propre que celle du pendule, à la détermination d'une mesure universelle ; et il n'est pas étonnant que des observateurs, d'ailleurs très-exacts, ne se soient pas accordés dans les mesures qu'ils ont prises des degrés du méridien, puisqu'à raison des attractions locales, les latitudes de deux lieux également éloignés de l'équateur, pourroient différer entre elles de plusieurs secondes.

Paris, le 15 ventôse an 13.
6 mars 1805.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.



F. Bordiga, Place de l'Estrapade N.° 8.



MÉTHODE

Pour déterminer la longueur exacte du quart du Méridien, d'après les observations faites pour la mesure de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelonne.

Par A. M. LEGENDRE, *Membre de la Commission des Poids et Mesures, de l'Institut national.*

LES citoyens Delambre et Méchain ayant enfin terminé toutes les opérations relatives à la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelonne, on va s'occuper sans délai de déduire des données que ces excellens observateurs ont recueillies, la grandeur du quart du méridien qui étoit l'objet principal de leurs travaux. Dans cette circonstance, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de communiquer aux géomètres quelques idées sur la méthode qu'on pourroit suivre dans le calcul des observations, afin de parvenir à un résultat aussi exact que la nature de la question le comporte. Ces idées sont une suite de celles que j'ai déjà exposées dans un Mémoire sur les opérations trigonométriques, imprimé dans le volume de l'Académie des Sciences, pour l'année 1787; je prendrai de-là occasion de développer quelques démonstrations qui avoient été omises dans ce Mémoire, et que plusieurs personnes ont paru desirer.

Les élémens du calcul empruntés de l'observation sont :

1°. Les angles des triangles et les hauteurs des stations nécessaires pour réduire chaque triangle au plan de l'horizon.

2°. La base de Melun à Lieusaint, Cette base principale, ainsi que la base de vérification, mesurée près Perpignan, ont été rapportées à un module particulier, appelé *la règle n°. 1*, dont la longueur est fort approchée de deux toises.

3°. Les azimuths de deux côtés de la chaîne, ou les angles qu'ils font avec le méridien. Ces azimuths ayant été mesurés aux deux extrémités de la chaîne, il en résulte une vérification de

toute l'opération, non moins importante et plus facile que celle qui a été donnée par la mesure d'une seconde base.

4°. Enfin les latitudes des points extrêmes, Dunkerque et Montjouy, ainsi que celles de trois autres points intermédiaires, Paris, Evaux et Carcassonne.

Tous ces élémens ont été déterminés avec un degré de précision qui auroit droit d'étonner, s'il n'étoit une suite nécessaire de l'excellence des moyens employés, et de l'habileté des observateurs.

Du Calcul des Triangles.

Lorsqu'on aura réduit à l'horizon tous les angles des triangles (*Note Ire*), et qu'on aura appliqué à chacun des angles réduits la correction nécessaire pour que la somme des angles de chaque triangle soit égale à 180° + le petit excès dû à la surface du triangle, et calculé *a priori* (*Note II*), il n'y aura plus lieu d'avoir égard à l'inégalité de hauteur des stations, et toute la chaîne de triangles se trouvera projetée sur une surface sphérique ou sphéroïdique, qu'on peut regarder comme un prolongement de la surface de la mer.

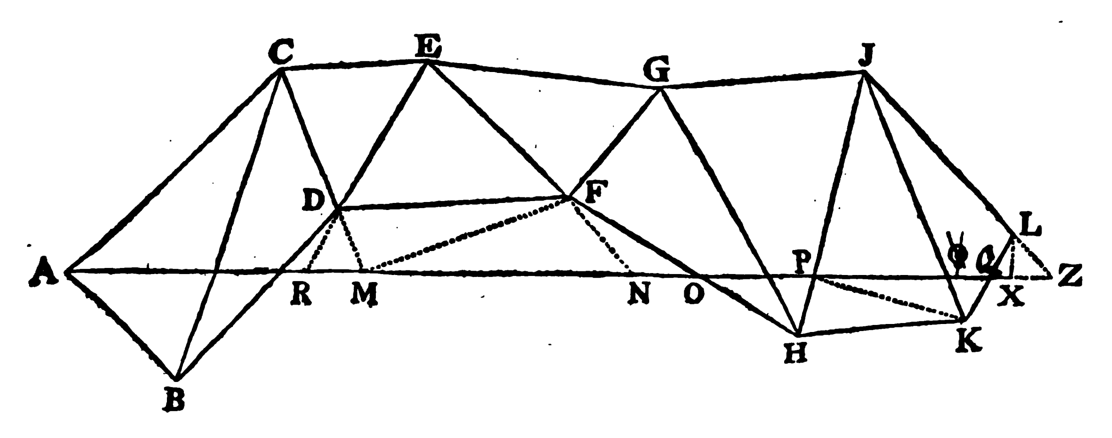
Dans cette hypothèse, qui paroît la plus propre à simplifier les calculs, tous les triangles deviennent sphériques ou sphéroïdiques, les côtés sont ou peuvent être considérés comme des arcs de cercle; et la base, qui est pareillement un arc de cercle, se déduit aisément de la base mesurée, en y appliquant une correction calculée d'après les hauteurs connues de ses deux points extrêmes au-dessus du niveau de la mer.

Cela posé, pour calculer les différens côtés de la chaîne des triangles de projection, on pourra faire usage du théorême énoncé dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1787, et dont nous donnerons la démonstration ci-après (*Note III*); en conséquence, si, dans le triangle proposé, la somme des angles est $180° + \omega$, on retranchera $\frac{1}{3}\,\omega$ de chacun des angles, afin que la somme des angles restans soit de 180°. Cette sous-

traction faite, on procédera comme si le triangle proposé étoit rectiligne, c'est-à-dire qu'on fera la proportion : *Le sinus de l'angle opposé au côté connu est à ce côté comme le sinus d'un autre angle est au côté opposé.* Le quatrième terme sera la vraie longueur du côté du triangle sphérique qu'on veut résoudre, laquelle se trouvera ainsi avec la même facilité que si la chaîne de triangles qu'on calcule étoit située toute entière sur un même plan.

On a proposé de calculer ces mêmes triangles sphériques, au moyen des triangles rectilignes formés par les cordes de leurs côtés; mais, pour cela, il faut déterminer par autant d'opérations distinctes la différence qu'il y a entre chaque angle du triangle sphérique et l'angle correspondant du triangle rectiligne. Il est évident que cette méthode est moins simple et plus sujette à erreur que celle que nous venons d'exposer.

Du Calcul de l'arc du Méridien.



Soit une chaîne quelconque de triangles ABCDEF, etc. peu éloignée de la méridienne AMNX, et tracée sur une surface courbe qui représente le niveau des eaux de la mer; on suppose connu par ce qui précède les angles et les côtés de ces triangles, on connoît de plus par l'observation l'angle CAM qui mesure l'azimuth du côté AC, ou son inclinaison par rapport au méri-

trouvera que la latitude du point X est $\lambda + \frac{1}{2} R \left(\frac{y}{r}\right)^2 \tang \lambda$, où l'on voit que la correction sera exprimée en secondes.

Equations entre les longueurs des Arcs et les latitudes de leurs extrémités.

Par les calculs précédens, on connoîtra les longueurs des différentes parties de la méridienne, comprises entre les parallèles des principaux points de station, qui sont Dunkerque, Paris, Evaux, Carcassonne et Montjouy, près Barcelonne. On connoît d'ailleurs, par des observations très-exactes, les latitudes de ces différens points; il ne s'agit donc plus que d'établir les équations qui doivent avoir lieu entre la longueur de chaque arc et les latitudes de ses extrémités.

Dunkerque.
Paris.
Evaux.
Carcassonne.
Montjouy.

Jusques-là on pouvoit se passer de connoître la nature de la courbe du méridien, et il suffisoit de savoir que cette courbe étoit peu différente du cercle; car dès-lors tous les triangles tracés sur la surface du sphéroïde, et n'excédant pas la grandeur des triangles observés, pouvoient être regardés sensiblement comme des triangles sphériques. Mais à présent, pour avoir la relation entre les longueurs des arcs et les latitudes, il est nécessaire de faire une hypothèse, la plus générale qu'on pourra, sur la figure du méridien.

Soit a le rayon de l'équateur, b le demi-axe ou le rayon mené au pôle; soit v un rayon vecteur quelconque, et ψ l'angle que font entr'elles les lignes b et v; il résulte d'un grand nombre de recherches fondées sur la théorie de l'équilibre des fluides (1), qu'on pourra supposer

$$v = b\,(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

m étant une quantité très-petite de l'ordre de l'applatissement,

(1) *Voyez* les Mémoires de l'Acad. des Sciences, année 1789, p. 394 et 418.

et n une quantité de l'ordre m^2. Si on fait $b = a(1 + \alpha)$, en sorte que α désigne la quantité de l'applatissement, on aura donc $\alpha = m + n$.

Dans le cas où la figure du méridien seroit exactement elliptique, on auroit par les propriétés connues de cette courbe,

$$v^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi} = \frac{b^2 (1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^2 - (2\alpha + \alpha^2) \sin^2 \psi}$$

ou en extrayant la racine, et développant jusqu'aux quantités de l'ordre α^2 inclusivement,

$$v = b\left(1 + (\alpha - \tfrac{3}{2}\alpha^2) \sin^2 \psi + \tfrac{3}{2}\alpha^2 \sin^4 \psi\right).$$

Ainsi la figure représentée par l'équation

$$v = b(1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

se confondra avec une ellipse, si on a $n = \frac{3}{2} m^2$; mais en général cette équation représente une courbe très-voisine de l'ellipse.

Cela posé, soit S l'arc du méridien compris entre les deux rayons vecteurs a et v, on aura $dS = -\sqrt{(v^2 d\psi^2 + dv^2)}$; donc, en observant que dv est de l'ordre de α, et qu'il suffit de développer toutes les quantités jusqu'aux α^2 inclusivement, on aura

$$dS = -v\,d\psi - \frac{dv^2}{2v\,d\psi} = -b\,d\psi(1 + m\sin^2\psi + n\sin^4\psi + 2m^2\sin^2\psi\cos^2\psi)$$

De-là résulte en intégrant et déterminant la constante

$$S = b\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{3n}{8} + \tfrac{1}{4}m^2\right)(90^\circ - \psi) + b(\tfrac{1}{4}m + \tfrac{1}{4}n)\sin 2\psi$$
$$+ b(\tfrac{1}{16}m^2 - \tfrac{1}{32}n)\sin 4\psi$$

Il convient maintenant d'introduire, à la place de l'angle ψ, la latitude de l'extrémité de l'arc, que nous appellerons L. Or, quelle que soit la courbe du méridien, il est facile de voir qu'on a en général

$$\operatorname{tang}(\psi + L - 90^\circ) = \frac{dv}{v\,d\psi}.$$

Donc, puisqu'on néglige les puissances troisièmes de α, on aura

$$\psi + L - 90^\circ = \frac{dv}{v\,d\psi}, \text{ et } L = 90^\circ - \psi + 2\sin\psi\cos\psi[m + (2n - m^2)\sin^2\psi]$$
$$= 90^\circ - \psi + (m + n - \tfrac{1}{2}m^2)\sin 2\psi + (\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{2}n)\sin 4\psi.$$

De-là résulte réciproquement

$$\psi = 90^\circ - L + (m + n - \tfrac{1}{2}m^2)\sin 2L - \left(\frac{5m^2}{4} - \frac{n}{2}\right)\sin 4L.$$

Cette valeur étant substituée dans celle de S, on trouvera, en se bornant toujours aux termes du second ordre,

$$S = b\left[(1 + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{3}{8}n + \tfrac{1}{4}m^2)L - \tfrac{3}{4}(m+n)\sin 2L + (\tfrac{15}{16}m^2 - \tfrac{15}{32}n)\sin 4L\right]$$

Soit M le quart du méridien, on aura, en faisant $L = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$,

$$M = b\,(1 + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{3}{8}n + \tfrac{1}{4}m^2)\,\tfrac{1}{2}\pi.$$

Donc,

$$S = M\left[\frac{L}{\frac{1}{2}\pi} - \tfrac{3}{4}\,\frac{(m+n-\frac{1}{2}m^2)}{\frac{1}{2}\pi}\sin 2L + \tfrac{15}{16}\,\frac{(m^2-\frac{1}{2}n)}{\frac{1}{2}\pi}\sin 4L\right]$$

Donc si S' est un autre arc terminé à la latitude L', on aura

$$S' - S = M\left(\frac{L'-L}{\frac{1}{2}\pi} - \tfrac{3}{4}\,\frac{(m+n-\frac{1}{2}m^2)}{\frac{1}{2}\pi}(\sin 2L' - \sin 2L) + \tfrac{15}{16}\cdot\frac{m^2-\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\pi}(\sin 4L' - \sin 4L\right.$$

Telle est l'équation qui donne la relation entre un arc quelconque $S'-S$ du méridien, et les latitudes L', L de ses points extrêmes. On voit que de cette équation on tirera immédiatement la longueur du quart du méridien M, dès qu'on connoîtra les coefficiens m et n.

Soit pour abréger $p = \frac{3}{4}\cdot\frac{m+n-\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}\pi}$, $q = \frac{15}{16}\cdot\frac{m^2-\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\pi}$, on pourra regarder p et q comme les coefficiens inconnus, et l'équation précédente se réduira à la forme

$$S' - S = M\left(\frac{L'-L}{\frac{1}{2}\pi} - p(\sin 2L' - \sin 2L) + q(\sin 4L' - \sin 4L)\right)$$

Comme le coefficient q est beaucoup plus petit que p, on peut, dans une première approximation, négliger le terme qui contient q.

Appelons L, L', L'', L''', L'''' les latitudes respectives des points M, C, E, P, D; appelons pareillement S, S', S'', S''', S'''' les arcs du méridien compris depuis l'équateur jusqu'à ces différens points. L'équation précédente, appliquée successivement aux deux arcs ME, ED, donnera, en négligeant q, les deux équations

$$S'' - S = M\,\frac{L''-L}{\frac{1}{2}\pi} - Mp(\sin 2L'' - \sin 2L)$$

$$S'''' - S'' = M\,\frac{L''''-L''}{\frac{1}{2}\pi} - Mp(\sin 2L'''' - \sin 2L'')$$

D'après

D'après ces deux équations, il sera facile de déterminer les valeurs de M et p, lesquelles doivent déjà être fort approchées, puisqu'on ne néglige que des quantités de l'ordre de α^2 (1).

Soient M° et p° les premières valeurs approchées de M et p; pour en avoir de plus exactes, on fera $M = M^\circ (1 + x)$, $Mp = M^\circ p^\circ (1 + y)$, $Mq = M^\circ z$; puis substituant dans l'équation générale les quantités relatives aux quatre arcs ME, ED, MP, CD, on aura les quatre équations

$$\frac{S'' - S}{M^\circ} = \frac{L'' - L}{\frac{1}{2}\pi}(1+x) - p^\circ(1+y)(\sin 2L'' - \sin 2L) + z(\sin 4L'' - \sin 4L)$$

$$\frac{S^{IV} - S''}{M^\circ} = \frac{L^{IV} - L''}{\frac{1}{2}\pi}(1+x) - p^\circ(1+y)(\sin 2L^{IV} - \sin 2L'') + z(\sin 4L^{IV} - \sin 4L'')$$

$$\frac{S''' - S}{M^\circ} = \frac{L''' - L}{\frac{1}{2}\pi}(1+x) - p^\circ(1+y)(\sin 2L''' - \sin 2L) + z(\sin 4L''' - \sin 4L)$$

$$\frac{S^{IV} - S'}{M^\circ} = \frac{L^{IV} - L'}{\frac{1}{2}\pi}(1+x) - p^\circ(1+y)(\sin 2L^{IV} - \sin 2L') + z(\sin 4L^{IV} - \sin 4L')$$

où l'on voit qu'en vertu de la supposition par laquelle M° et p° ont été déterminées, les deux premières se réduisent à celles-ci

$$o = \frac{L'' - L}{\frac{1}{2}\pi} x - y(\sin 2L'' - \sin 2L) + z(\sin 4L'' - \sin 4L)$$

$$o = \frac{L^{IV} - L''}{\frac{1}{2}\pi} x - y(\sin 2L^{IV} - \sin 2L'') + z(\sin 4L^{IV} - \sin 4L'')$$

De sorte qu'on aura quatre équations de cette forme

$$\begin{aligned} o &= f x - g y + h z \\ o &= f' x - g' y + h' z \\ e'' &= f'' x - g'' y + h'' z \\ e''' &= f''' x - g''' y + h''' z \end{aligned}$$

desquelles il faut tirer les valeurs de x, y, z. Dans ce genre d'analyse, dont les questions astronomiques offrent beaucoup d'exemples, il ne faut pas chercher à résoudre exactement trois des équations, ce qui feroit porter toute l'erreur sur la qua-

(1) Il est vraisemblable que l'applatissement α n'est pas fort éloigné de $\frac{1}{320}$, et qu'ainsi on doit avoir $p = \frac{3}{2\alpha} \cdot \frac{1}{320} = \frac{1}{670}$ à-peu-près.

trième ; mais il faut tâcher de compenser les erreurs de manière qu'elles portent à-peu-près également sur toutes les quatre ; c'est ce qui n'offrira point de difficulté lorsque les valeurs numériques seront substituées.

La valeur de x étant connue, on aura immédiatement la longueur du quart du méridien $M = M^\circ (1 + x)$, qui est l'objet principal de ces recherches. Ensuite les valeurs de y et z donneront des notions précieuses sur la figure du méridien.

On aura d'abord $p = \frac{p^\circ (1 + y)}{1 + x}$, et $q = \frac{z}{1 + x}$, ou simplement $p = p^\circ (1 + y - x)$, $q = z$. Mais on a fait $p = \frac{3}{4} \cdot \frac{m + n - \frac{1}{2} m^2}{\frac{1}{2} \pi}$, $q = \frac{21}{16} \cdot \frac{m^2 - \frac{1}{2} n}{\frac{1}{2} \pi}$, soit donc $\frac{2}{3} p \pi + \frac{16}{15} q \pi = r$, on aura $m = r - \frac{3}{2} r^2$, $n = 2 m^2 - \frac{16}{15} q \pi$: de-là résulte l'applatissement $\alpha = m + n$; et pour juger jusqu'à quel point la figure du méridien approche de l'ellipse, on prendra la valeur de $n - \frac{3}{2} m^2$, ou de $\frac{1}{2} m^2 - \frac{16}{15} q \pi$, laquelle devra être zéro, si le méridien est une ellipse. Enfin m et n étant connus, on aura l'équation de la courbe du méridien

$$\nu = b (1 + m \sin^2 \psi + n \sin^4 \psi)$$

dans laquelle le demi-axe b doit être tiré de l'équation

$$M = b (1 + \tfrac{1}{2} m + \tfrac{3}{8} n + \tfrac{1}{4} m^2) . \tfrac{1}{2} \pi.$$

Ces déterminations ne laisseront rien à desirer, si toutefois les erreurs des quatre équations-ci-dessus peuvent être assez atténuées pour ne pas passer les limites des erreurs de l'observation, et si en même temps les valeurs de x, y, z, sont de la petitesse convenable pour justifier l'hypothèse qui sert de base à ces calculs.

Dans le cas très-peu probable où l'on ne pourroit pas satisfaire assez exactement aux équations mentionnées, on seroit obligé de conclure que la figure du méridien est très-irrégulière, et que la connoissance des neuf ou dix degrés mesurés ne suffit pas pour déterminer la longueur du quart du méridien. Il faudroit donc alors convenir d'une autre manière d'établir la mesure

universelle, et le moyen qui se présente naturellement seroit de prendre, au lieu du quart du méridien, une longueur égale à 10000 fois la minute décimale du méridien, prise au 50[e] degré décimal de latitude. Cette longueur seroit la valeur du myriamètre, et on pourroit la déterminer avec toute la précision requise d'après les degrés mesurés; mais il y a lieu de croire qu'on ne sera pas obligé d'en venir à cet expédient.

NOTE I[re]. *Réduction d'un Angle à l'horizon.*

Soit A l'angle observé entre deux points éloignés; soient $90° + \alpha$ et $90° + \beta$ les distances de ces mêmes points au zénith; soit enfin $A + x$ l'angle résultant de la projection des côtés de l'angle A sur l'horizon, on aura par les formules connues des triangles sphériques, et en supposant le rayon $= 1$,

$$\cos(A+x) = \frac{\cos A - \cos(90°+\alpha)\cos(90°+\beta)}{\sin(90°+\alpha)\sin(90°+\beta)} = \frac{\cos A - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}$$

Dans les observations géodésiques, les angles α et β peuvent toujours être supposés très-petits : ainsi, en négligeant seulement les quantités du quatrième ordre, on pourra faire

$$\sin a \sin b = \alpha\beta, \quad \cos\alpha = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \cos\beta = 1 - \tfrac{1}{2}\beta^2,$$

ce qui donnera $\cos(A+x) = \cos A\,(1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2) - \alpha\beta$. De-là on voit que x doit être une quantité du second ordre : on peut, par conséquent, mettre $\cos A - x \sin A$ à la place de $\cos(A+x)$, et on aura

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos A}{\sin A} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos A}{\sin A} - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos A}{\sin A}.$$

Soit donc pour abréger $\frac{\alpha+\beta}{2} = p$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = q$, on aura

$$x = p^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A - q^2 \cot \tfrac{1}{2} A;$$

cette valeur est exprimée en parties du rayon : mais comme dans la pratique p et q seront donnés en secondes, si l'on veut que x soit exprimé de la même manière, il faudra faire

$$x = \frac{p^2}{R} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A - \frac{q^2}{R} \cot \tfrac{1}{2} A,$$

R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, nombre dont le logarithme est 5,314425.

NOTE II. *Excès de la somme des trois angles d'un triangle réduit à l'horizon, sur* 180°.

Il suffit de connoître à-peu-près les côtés d'un triangle sphérique très-peu courbe, pour être en état de déterminer avec précision le petit excès de la somme de ses trois angles sur 180°. Soit cet excès ω, soit T l'aire approchée du triangle en supposant le rayon de la sphère $= 1$, on aura, par le principe connu de l'aire du triangle sphérique, $\omega = T$: donc si le rayon de la sphère est r, et si on veut que ω soit exprimé en secondes, il faudra faire $\omega = \frac{T}{r^2}.R$, R étant toujours le nombre de secondes contenues dans le rayon des tables.

Dans l'évaluation du rapport $\frac{T}{r^2}$, il faudra exprimer le rayon r de la sphère par la même unité qui sert à exprimer les côtés du triangle. Cette unité ou module valant à-peu-près 2 toises, on devra prendre $\log r = 6.2139$; d'ailleurs on a $\log R = 5.3144$: *donc au logarithme de la surface du triangle, exprimée en modules quarrés, il faudra ajouter le logarithme constant* 2,8866, *et on aura le logarithme de l'excès* ω, *exprimé en secondes.*

NOTE III. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.*

Soient A, B, C les angles d'un triangle sphérique infiniment peu courbe, a, b, c les côtés opposés, on aura par la propriété connue $\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b$; et puisque les côtés a et b, comparés au rayon de la sphère, sont très-petits, on pourra

faire $\sin a = a - \frac{a^3}{6}$, $\sin b = b - \frac{b^3}{6}$; ce qui donnera

$$\sin A : \sin B :: a\,(1 - \tfrac{1}{6}a^2) : b\,(1 - \tfrac{1}{6}b^2).$$

Cherchons maintenant une indéterminée x, telle qu'on ait

$$a : b :: \sin\,(A - x) : \sin\,(B - x)\,;$$

de cette équation on tirera $\operatorname{tang} x = \frac{a \sin B - b \sin A}{a \cos B - b \cos A}$; et parce que $\frac{a}{b} = \frac{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A}{(1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B}$, on aura

$$\operatorname{tang} x = \frac{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A \sin B - (1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B \sin A}{(1 - \frac{1}{6}b^2)\sin A \cos B - (1 - \frac{1}{6}a^2)\sin B \cos A};$$

d'où l'on tire en négligeant seulement les quantités du quatrième ordre

$$x = \tfrac{1}{6}(a^2 - b^2).\frac{\sin A \sin B}{\sin\,(A - B)}.$$

Mais en considérant le triangle proposé comme rectiligne, il est aisé de voir que la quantité $\frac{1}{2}(a^2 - b^2).\frac{\sin A \sin B}{\sin\,(A - B)}$ se réduit à $\frac{1}{2}\,a\,b \sin C$, et représente par conséquent l'aire du triangle; donc si cette aire est appellée ω, on aura $x = \frac{1}{3}\,\omega$; d'ailleurs on sait que l'aire ω représente aussi l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique sur $180°$; de-là et de la proportion $\sin\,(A - \frac{1}{3}\omega) : \sin\,(B - \frac{1}{3}\omega) :: a : b$, qui aura semblablement lieu pour deux autres côtés, on tire ce théorême remarquable :

Si la somme des trois angles d'un triangle sphérique, dont les côtés sont très-petits, est supposée $180° + \omega$, *et que de chaque angle on retranche* $\frac{1}{3}\,\omega$, *ce qui réduira la somme des angles restans à* $180°$ *juste, je dis que les sinus des angles ainsi diminués seront proportionnels aux côtés opposés, de sorte que le triangle pourra être résolu comme s'il étoit parfaitement rectiligne.*

C'est la proposition que j'avois donnée sans démonstration dans les Mémoires de l'Académie, année 1787, pag. 338. Elle ramène immédiatement à la trigonométrie rectiligne la réso-

lution des triangles sphériques très-peu courbes ou dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère. Il est inutile de développer les différens cas de la nouvelle espèce de trigonométrie qu'on pourroit déduire de ce théorême, et il suffit de considérer que le triangle sphérique dont les élémens sont A, B, C; a, b, c, répond toujours à un triangle rectiligne dont les élémens sont $A - \frac{1}{3}\omega$, $B - \frac{1}{3}\omega$, $C - \frac{1}{3}\omega$; a, b, c, de sorte que la résolution de l'un fera toujours connoître la résolution de l'autre. Mais il faut qu'on connoisse au moins un côté, et que ω soit déterminé *a priori* par l'aire du triangle dont il suffit d'avoir une valeur grossièrement approchée.

Au reste, quand même les côtés du triangle à résoudre seroient de quelques degrés, le théorême seroit encore sensiblement vrai et donneroit une approximation suffisante.

NOTE IV. *De la Perpendiculaire à la Méridienne.*

Par un point A dont la latitude = L, soit élevée sur le méridien la perpendiculaire $AB = y$, et soit proposé de trouver la latitude du point B, sa longitude, et l'angle PBA que fait BA avec le méridien du point A, c'est-à-dire l'azimuth de A observé de B (1).

Pour cela nous menerons la normale MA terminée à l'axe du sphéroïde en M, et faisant $MA = r$, nous aurons

$$r = b\,(1 + 2\,m - m\cos^2 L);$$

cette ligne MA est en même-temps le rayon de la développée de l'arc AB, de sorte qu'on peut regarder AB comme un arc de cercle décrit du centre M. Faisons en conséquence $\frac{y}{r} = \varphi$, et du point M comme centre, décrivons une surface sphérique qui rencontre en p, a, b les lignes menées de M vers les points P, A, B, (P étant supposé le pôle), nous aurons

(1) La figure est dans le Mémoire cité de 1787; mais on peut aisément y suppléer par cette explication.

un triangle sphérique $p\,a\,b$ dans lequel on connoîtra le côté $p\,a = 90^\circ - L$, le côté $a\,b = \varphi$, et l'angle compris $p\,a\,b$, qui est un angle droit. On aura donc par les formules ordinaires

$$\cot b = \operatorname{tang} L \sin \varphi, \quad \cos p\,b = \sin L \cos \varphi, \quad \operatorname{tang} p = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\cos L};$$

développant ces formules dans la supposition que φ est une quantité très-petite, et omettant seulement les quantités de l'ordre φ^4, on aura

$$p = \frac{\varphi}{\cos L} - \tfrac{1}{3}.\frac{\varphi^3 \sin^2 L}{\cos^3 L}$$

$$p\,b = 90^\circ - L + \tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tang} L$$

$$b = 90^\circ - \varphi \operatorname{tang} L + \tfrac{1}{3}\varphi^3 \operatorname{tang} L\,(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L)$$

L'angle p donne la différence en longitude entre les deux points A et B; l'angle b est égal à l'azimuth demandé PBA, ou du moins on peut prouver qu'il n'en diffère que de la quantité $\frac{1}{2} m \varphi^3 \operatorname{tang} L$, qu'il faudroit ajouter à la valeur précédente pour avoir égard à l'aberration de sphéricité; mais cette différence pourra toujours être négligée, même quand la distance y seroit égale à 2 ou 3 degrés. Enfin $90^\circ - p\,b$ ou $L - \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tang} L$, est une valeur approchée de la latitude du point B; mais cette valeur a besoin d'une correction, parce que MB ne se confond pas avec la verticale au point B. Soit cette verticale NB, et la latitude en $B = L'$, on trouvera aisément CM (distance du centre C au point M) $= 2\,m\,r \sin L$, pareillement $CN = 2\,m\,r \sin L'$; donc $MN = 2\,m\,r(\sin L - \sin L') = 2\,m\,r\,(L - L') \cos L = m\,r\,\varphi^2 \sin L$: de-là l'angle NAM ou $NBM = \frac{MN \cos L}{r} = m\,\varphi^2 \sin L \cos L$; donc la latitude corrigée du point B sera

$$L' = L - \tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tang} L - m\,\varphi^2 \sin L \cos L.$$

Si on joint à cet élément la longitude et l'azimuth déjà déterminés, on aura tout ce qui concerne la position du point B.

Quelques personnes ont pensé que des observations d'azimuth et de latitude, faites dans des lieux assez différens en longitude, et dont on connoîtroit la distance, seroient très-propres à déterminer la figure de la terre. Cette opinion n'est nullement fondée, puis-

qu'on voit que la ligne AB étant perpendiculaire à la méridienne, le coefficient m, qui mesure l'applatissement, n'entre que pour une quantité insensible dans l'expression de la latitude, et qu'il influe encore moins sur l'expression de l'azimuth du point B. Ce sont donc au contraire les observations faites dans la direction du méridien, qui sont les plus propres à déterminer la vraie quantité de l'applatissement.

Les formules précédentes s'appliquent à la perpendiculaire LX, menée par le point extrême L de la chaîne des triangles, et on en tire ces deux conséquences (*Voyez* la figure ci-dessus, pag. 3).

1°. Soit la latitude en X = L, en L = λ, soit la distance LX = y, le rayon de la terre ou la normale au point X = r, on aura $\lambda = L - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 \operatorname{tang} L - m\left(\frac{y}{r}\right)^2 \sin L \cos L$, et réciproquement

$$L = \lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 \operatorname{tang} \lambda + m\left(\frac{y}{r}\right)^2 \sin \lambda \cos \lambda;$$

mais la seconde partie de la correction sera presque toujours négligeable.

2°. Les mêmes choses étant posées, on aura l'azimuth de LX, c'est-à-dire l'angle au point L, entre la ligne LX et la ligne menée au pôle,

$$= 90° - \frac{y}{r} \operatorname{tang} L + \frac{1}{3}.\frac{y^3}{r^3} \operatorname{tang} L \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 L\right)$$

$$= 90° - \frac{y}{r} \operatorname{tang} \lambda - \frac{y^3}{3r^3} \operatorname{tang} \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \lambda\right)$$

A cet angle, ajoutant l'angle calculé QLX, on aura l'azimuth de LK, lequel doit s'accorder avec l'azimuth observé directement en ce point, et fournira ainsi une vérification de toute l'opération.

Paris, 9 nivôse an VII.

MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES,

Où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes, qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se rencontrent fréquemment dans les applications du calcul intégral.

Lu à la ci-devant Académie des Sciences en avril 1792.

PAR ADRIEN-MARIE LE GENDRE.



A PARIS,

Chez { le C. DU PONT, Imprimeur-Libraire, rue de la Loi, N°. 14.
le C. FIRMIN DIDOT, Libraire rue Thionville.

L'AN DEUXIÈME DE LA RÉPUBLIQUE.

MÉMOIRE
SUR
LES TRANSCENDANTES
ELLIPTIQUES.

PAR ADRIEN-MARIE LE GENDRE.

UN grand nombre d'intégrales peuvent se déterminer par le seul secours des arcs de cercle et des logarithmes, qui sont les plus simples des quantités transcendantes; mais pour étendre les applications du calcul intégral, il faut nécessairement avoir recours à des transcendantes plus composées. C'est en examinant avec soin la nature et les propriétés de ces transcendantes, au moins de celles dont l'usage est le plus fréquent, qu'on parviendra à simplifier considérablement les résultats de la théorie, et à en rendre l'usage commode pour la pratique.

Les arcs d'ellipse sont, après les arcs de cercle et les logarithmes, une des transcendantes les plus simples, et dont on pourroit faire en quelque sorte un nouvel instrument de calcul, si une fois on s'étoit familiarisé avec leurs propriétés, et que l'on eût des moyens faciles de les évaluer avec précision. C'est sur quoi nous avons proposé quelques vues nouvelles dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1786.

Mais si les arcs d'ellipse ajoutent beaucoup aux moyens de l'analyse, sur-tout depuis qu'on a remarqué que les arcs

d'hyperbole s'en déduisent aisément, ils sont cependant insuffisans pour résoudre des questions d'ailleurs peu compliquées, telles que la surface du cône oblique, le mouvement de rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, etc. Ces questions, et une infinité d'autres, dépendent en général de l'intégrale $\int \frac{Pdx}{R}$ dans laquelle P est une fonction rationnelle de x, et R un radical de la forme $\sqrt{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, α, 6, γ, etc., étant constans. Or, en examinant avec attention la nature de cette intégrale, on trouve qu'elle offre trois espèces distinctes de transcendantes. La première et la seconde peuvent être exprimées par des arcs d'ellipse ; la troisième est plus composée : mais elle a tant d'analogie avec les deux autres, qu'on peut les regarder toutes trois comme ne formant qu'un même ordre de transcendantes, le premier après les arcs de cercle et les logarithmes.

Les deux premières espèces auroient pu se confondre en une seule, puisqu'elles sont exprimables par des arcs d'ellipse ; cependant nous avons cru devoir les distinguer, attendu que ce que nous appellons la première espèce peut bien se déterminer par la seconde, mais non pas la seconde par la première ; d'où il paroît que la première espèce, considérée analytiquement, est plus simple que l'autre, et qu'ainsi les arcs d'ellipse ne sont pas la transcendante la plus simple qu'on rencontre après les arcs de cercle et les logarithmes. Au reste, les rapports sont tels entre les trois sortes de transcendantes dont il s'agit, que nous avons cru devoir leur donner la dénomination commune de *Transcendantes elliptiques*.

Nous nous proposons dans ce Mémoire de développer la nature et les propriétés de cet ordre de transcendantes, de manière à en rendre l'usage facile dans les applications du calcul intégral. Plusieurs des méthodes et des résultats que nous allons exposer, sont déja connus des géomètres:

nous avons réuni sous un même point de vue tout ce qui a été publié jusqu'à présent sur cette théorie; mais nous avons tâché en même temps d'y ajouter de nouveaux degrés de perfection.

Idée générale des différentes sortes de transcendantes contenues dans la formule intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$.

(1) Nous représentons par P une fonction rationnelle quelconque de x, et par R le radical $\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$: ce radical restant le même, on peut donner une infinité de valeurs à P; mais il n'en résulte pas pour cela une infinité de transcendantes de nature différente. On peut toujours par des intégrations partielles, réduire l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$ à une partie algébrique, plus un certain nombre de transcendantes, qui sont toujours de la même forme et de la même nature. C'est ce qu'il s'agit de développer.

Supposons d'abord que P soit une fonction entière de x, ensorte qu'on ait $P=A+Bx+Cx^2+\ldots+Kx^k$. Si on représente, pour abréger, l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{R}$ par Π^m, il est clair qu'on aura

+ prise depuis x=0

$$\int \frac{P\,dx}{R}=A\Pi^0+B\Pi^1+C\Pi^2+\ldots+K\Pi^k:$$

or, en différentiant la quantité $x^{m-3}R$, et revenant de la différentielle à l'intégrale, on trouve cette formule:

$$x^{m-3}R=(m-3)\alpha\Pi^{m-4}+(m-\tfrac{5}{2})\beta\Pi^{m-3}+(m-2)\gamma\Pi^{m-2}+(m-\tfrac{3}{2})\delta\Pi^{m-1}+(m-1)\varepsilon\Pi^m;$$

Cette équation suppose m>3, et si m=3 elle suppose A=0

d'où il suit que Π^m, Π^{m-1}, etc. peuvent s'abaisser succes-

sivement à des degrés inférieurs, et qu'on peut continuer la réduction jusqu'à ce qu'on n'ait que des quantités au-dessous de Π^3; car la réduction de Π^3 est encore possible, parce que dans le cas de $m = 3$, le terme qui sembleroit devoir contenir Π^{-1} s'évanouit. Donc P étant une fonction entière de x, l'intégrale $\int \frac{P dx}{R}$ pourra toujours se réduire à une quantité algébrique, plus une transcendante qui sera constamment de la forme

$$\int (A + Bx + Cx^2) \frac{dx}{R}.$$

(2). Considérons maintenant la formule dans toute sa généralité, et soit P une fonction rationelle quelconque de x: on fera comme s'il étoit question d'intégrer la fraction rationelle $P dx$; on extraira d'abord la partie entière qui peut y être contenue, et cette partie sera traitée comme il vient d'être dit. On décomposera ensuite le reste en plusieurs fractions partielles, selon le nombre des facteurs du dénominateur; de-là résulteront autant de termes dans l'intégrale totale, et chacun de ces termes pourra être représenté par l'expression générale $N \int \frac{dx}{(1 + nx)^k R}$. Or, il est facile de réduire tous les termes de cette espèce à des termes semblables, où $k = 1$, c'est ce que nous allons prouver dans un instant. Observons auparavant que si le dénominateur, au lieu d'être complexe, étoit simplement x^k, l'intégrale $\int \frac{dx}{x^k R}$, et toutes les semblables où $k > 1$, pourroient se déterminer par le moyen de l'intégrale $\int \left(\frac{A}{x} + B + Cx + Dx^2\right) \frac{dx}{R}$; il suffiroit pour cela de donner à $m - 4$ des valeurs négatives dans la formule de l'article 1.

Revenons au terme général $\int \frac{dx}{(1 + nx)^k R}$ que nous appellerons Γ^k. Si on fait $1 + nx = \omega$, et qu'on prenne les

coëfficiens α', β', etc., de manière qu'on ait l'équation identique

$$\alpha + \beta\left(\frac{\omega-1}{n}\right) + \gamma\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^2 + \delta\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^3 + \varepsilon\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^4$$
$$= \alpha' + \beta'\omega + \gamma'\omega^2 + \delta'\omega^3 + \varepsilon'\omega^4,$$

on trouvera par la différentiation de la quantité $\omega^{-k+1}R$, cette formule générale :

$$\frac{-R}{n(1+nx)^{k-1}} = (k-1)\alpha'\Gamma^k + (k-\tfrac{3}{2})\beta'\Gamma^{k-1} + (k-2)\gamma'\Gamma^{k-2}$$
$$+ (k-\tfrac{5}{2})\delta'\Gamma^{k-3} + (k-3)\varepsilon'\Gamma^{k-4}.$$

D'où il suit que les quantités Γ^2, Γ^3, etc., peuvent se déterminer au moyen de Γ^1, Γ^0, Γ^{-1}, Γ^{-2}; or, $\Gamma^0 = \int \frac{dx}{R}$, $\Gamma^{-1} = \int (1+nx)\frac{dx}{R}$, $\Gamma^{-2} = \int (1+nx)^2 \frac{dx}{R}$. Donc en général la formule $\int \frac{dx}{(1+nx)^k R}$ et toutes les formules semblables dans lesquelles k est plus grand que l'unité, se réduiront toujours à une partie algébrique, plus une intégrale de la forme

$$\int \left(\frac{A}{1+nx} + B + Cx + Dx^2\right)\frac{dx}{R}.$$

(3). Nous conclurons de-là que, quelle que soit la fonction rationelle de x représentée par P, l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$ sera toujours décomposable en trois parties principales ; la première algébrique, la seconde de la forme $\int (A + Bx + Cx^2)\frac{dx}{R}$, et la troisième renfermant un ou plusieurs termes de la forme $N\int \frac{dx}{(1+nx)R}$, où le coëfficient n peut être réel ou imaginaire.

On voit par cette analyse que le nombre des transcendantes comprises dans la formule $\int \frac{P\,dx}{R}$ est très-limité. Il

n'en existe que de deux espèces principales, l'une de la forme $\int (A + Bx + Cx^2)\frac{dx}{R}$, l'autre de la forme $\int \frac{dx}{(1+nx)R}$. J'observe même que tant que n est réel, cette seconde espèce est comprise dans la première, et s'y ramène immédiatement, en faisant $1 + nx = \frac{1}{z}$.

Ces réductions générales une fois apperçues, nous allons suivre une autre route pour parvenir à une connoissance plus précise des mêmes transcendantes.

Manière de faire disparoître les puissances impaires de la variable sous le radical.

(4). Le radical étant toujours $\sqrt{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, supposons que la quantité sous le signe soit décomposée en deux facteurs réels $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$. Ces facteurs doivent être de même signe pour que le radical soit réel, ainsi on peut supposer

$$\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2) y^2.$$

De-là on tire,

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + \sqrt{[(\mu y^2 - \eta)^2 + (\lambda y^2 - \zeta)(\theta - \nu y^2)]}}{\theta - \nu y^2}.$$

Et si on appelle, pour abréger, Y le radical de cette expression, on aura $\frac{dx}{R} = \frac{dy}{Y}$. La valeur de x étant substituée dans P, on voit que la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ ou $\frac{Pdy}{Y}$ se décomposera toujours en deux parties, l'une rationnelle et intégrable par les règles ordinaires, l'autre affectée du radical Y, mais telle qu'il n'y aura que des puissances paires de y sous le radical et hors du radical. Ainsi l'intégration de la formule $\frac{Pdx}{R}$ se réduit toujours à celle d'une

formul

formule de la même nature, dans laquelle P et R ne contiennent que des puissances paires de x.

(5). Cette méthode est générale ; cependant, comme la valeur de x, qui doit être substituée dans P, est un peu compliquée, il ne sera pas inutile de faire voir qu'on peut parvenir au même but par une substitution beaucoup plus simple, qui consiste à faire $x = \frac{p+qy}{1+y}$, p et q étant deux constantes indéterminées.

Reprenons les facteurs $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$, et substituons dans chacun d'eux la valeur de x, on pourra faire abstraction du dénominateur commun qui sort du radical, et pour que les puissances impaires de y disparoissent dans les numérateurs, il faudra qu'on ait

$$\zeta + \eta(p+q) + \theta pq = 0,$$
$$\lambda + \mu(p+q) + \nu pq = 0.$$

Ces deux équations donneront des valeurs rationnelles de $p+q$ et pq ; mais pour que p et q soient réels, il faut encore que $(p+q)^2 - 4pq$, ou $(p-q)^2$ soit positif. Or, on peut distinguer deux cas :

1°. Si la quantité $\alpha + 6x + \gamma x^2 +$, etc. n'a pas tous ses facteurs réels, on pourra supposer que $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$ en contient deux imaginaires, et qu'on a en conséquence $\lambda\nu > \mu^2$. Mais la seconde des équations en p et q donne

$$(p-q)^2 = \left(\frac{\lambda + \nu pq}{\mu} - \frac{2\mu}{\nu}\right)^2 + \frac{4\lambda\nu - 4\mu^2}{\nu^2} ;$$

donc dans ce premier cas le second membre est positif, et les valeurs de p et q seront réelles.

2°. Si la quantité $\alpha + 6x +$, etc. a tous ses facteurs réels, et qu'en la décomposant en deux facteurs du second degré, comme on vient de faire, il n'en résulte pas des valeurs

réelles pour p et q, alors on observera qu'il y a deux autres manières de décomposer la quantité du quatrième degré en deux facteurs du second, et on peut être assuré que ces deux nouvelles combinaisons donneront des valeurs réelles pour p et q. En voici la démonstration.

Soient a, b, c, d les quatre valeurs de x qu'on a en faisant $R = 0$, les équations qui déterminent p et q pourront s'écrire ainsi :

$$ab - \tfrac{1}{2}(a + b)(p + q) + pq = 0,$$
$$cd - \tfrac{1}{2}(c + d)(p + q) + pq = 0.$$

Il en résulte

$$p + q = \frac{ab - cd}{a + b - c - d},$$

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{a - c \,.\, a - d \,.\, b - c \,.\, b - d}{(a + b - c - d)^2}.$$

Or, on est maître de rendre positif le numérateur de cette dernière quantité; car supposons que a, b, c, d soient écrites dans l'ordre de leur grandeur, les négatives venant après les positives, alors les différences $a - b$, $a - c$, etc. seront toutes positives, et $p - q$ sera réel. On aura encore $p - q$ réel, si on prend pour a et b les extrêmes en grandeur des racines a, b, c, d. Enfin, la troisième combinaison donneroit $p - q$ imaginaire.

Donc par la substitution de $x = \frac{p + qy}{1 + y}$, il est toujours possible de faire disparoître les puissances impaires de la variable sous le radical, et en même temps on obtient ce nouvel avantage, que les deux facteurs, sous le nouveau radical, seront réels et de la forme $f + gy^2$, ce qui est un point essentiel, et qu'on n'obtiendroit pas toujours par la première méthode.

Remarquons qu'il y a deux cas particuliers à examiner.

1°. Lorsque l'une des racines a et b est égale à l'une des racines c et d.

2°. Lorsqu'on a $a+b=c+d$. Dans le premier cas le radical R se simplifieroit, et l'intégrale ne dépendroit plus que des arcs-de-cercle et des logarithmes. Quant au second cas, il suffit d'une simple permutation pour cesser d'avoir $a+b=c+d$; mais on peut aussi profiter de cette circonstance pour faciliter la transformation. En effet, les deux facteurs de la quantité sous le radical étant alors de la forme, $\lambda+\nu(x^2+2mx)$, $\zeta+\theta(x^2+2mx)$, il est clair que si on fait $x+m=y$, les puissances impaires de la variable disparoîtront.

Réduction de la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ à la forme $\frac{Qd\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$.

(6) Puisque par une première préparation on peut faire ensorte qu'il n'y ait pas de puissances impaires de la variable sous le radical, nous ferons désormais $R=\sqrt{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)}$. Nous supposerons aussi que P est une fonction paire de x; car quelle que soit la fonction rationelle P, on peut toujours faire $P=M+Nx$, M et N étant des fonctions paires de x : or, la partie $\frac{Nxdx}{R}$ se ramène aux règles ordinaires, en faisant $x^2=y$; ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer la formule $\frac{Mdx}{R}$, dans laquelle M est une fonction paire de x.

Cela posé, nous allons prouver par l'énumération des différens cas, que la différentielle $\frac{dx}{R}$ peut toujours se ramener à la forme $\frac{md\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$, c étant plus petit que l'unité.

Premier cas. Supposons les facteurs de $\alpha+6x^2+\gamma x^4$ imaginaires, et représentons cette quantité par $\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos.\theta+\mu^2x^4$, λ et μ étant positifs, et $\cos.\theta$ pouvant être positif

ou négatif. On fera $x = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\,\phi$, et prenant $c = \sin.\ \frac{1}{2}\,\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

Second cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 + p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)$; la limite de x étant $\frac{1}{q}$, on fera $x = \frac{1}{q} \cos.\ \phi$ et $\frac{p^2}{p^2 + q^2} = c^2$, ce qui donnera

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{-d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

Si on vouloit que la transformée fût positive, il faudroit faire $\cot.\ \phi = \sqrt{(1 - c^2)}.\ \text{tang.}\ \psi$, ce qui donne directement $x^2 = \frac{\sin.^2 \psi}{q^2 + p^2 \cos.^2 \psi}$, et la transformée seroit

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \psi)}}.$$

Troisième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 + p^2 x^2)(x^2 - q^2)$, on fera $x = \frac{q}{\cos.\ \phi}$, $\frac{1}{1 + p^2 q^2} = c^2$, et on aura

$$\frac{dx}{R} = \frac{c}{m} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

Quatrième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 + p^2 x^2)(1 + q^2 x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $x = \frac{\text{tang.}\ \phi}{p}$, $\frac{p^2 - q^2}{p^2} = c^2$, on aura,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

Cinquième cas. Soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2 (1 - p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $px = \sin.\ \phi$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

Cette formule servira depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{p}$; le radical R seroit imaginaire depuis $x = \frac{1}{p}$ jusqu'à $x = \frac{1}{q}$; mais il redevient réel depuis $x = \frac{1}{q}$ jusqu'à $x = \infty$. Dans ce dernier cas, il faut écrire $R^2 = m^2(p^2x^2 - 1)(q^2x^2 - 1)$, et faisant $qx = \frac{1}{\sin. \varphi}$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera $\frac{-d\phi}{mp\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}$. Si on veut qu'elle soit positive, il faudra, comme ci-dessus, faire $\cot. \phi = \sqrt{(1 - c^2)}. \text{Tang.} \psi$, ce qui donne directement $x^2 = \frac{1 - c^2 \sin.^2 \psi}{q^2 \cos.^2 \psi}$, et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \psi)}}.$$

formule absolument semblable à la première ; d'où il suit que l'intégrale de $\frac{dx}{R}$ pour le cas de $x > \frac{1}{q}$ se déduira toujours de la même intégrale, prise en supposant $x < \frac{1}{p}$.

Sixième cas. Enfin, soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(x^2 - q^2)(p^2 - x^2)$, alors x doit être compris entre p et q. Soit $p > q$, et soit fait $x = \frac{q}{\cos. \psi}$, on aura d'abord $\frac{dx}{R} = \frac{d\psi}{m\sqrt{(p^2 - q^2 - p^2 \sin.^2 \psi)}}$. Dans cette formule l'angle ψ a une limite ; pour en introduire un indéfini, soit $\sin. \psi = c \sin. \phi$, et $c^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2}$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{m.p} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \phi)}},$$

à laquelle on seroit parvenu directement en faisant

$$x^2 = \frac{q^2}{1 - c^2 \sin.^2 \phi}.$$

(7) On peut remarquer maintenant, qu'abstraction faite du premier cas, les valeurs de x^2, qui opèrent la réduction

cherchée, sont toujours de la forme $\frac{A + B \sin^2 \phi}{C + D \sin^2 \phi}$ où les coëfficiens sont constans. Il ne s'agit plus que de substituer cette valeur de x^2 dans P, et la formule $\int \frac{P\,dx}{R}$ sera transformée en une autre $\int \frac{Q\,d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationelle paire de sin. ϕ, laquelle contiendra sin. ϕ au même degré que P contient x.

Nous faisons abstraction du premier cas, parce que la la forme de la valeur de x est un peu différente, et que d'ailleurs en suivant la méthode de l'article 5, on évite ce cas puisqu'on tombe toujours sur des facteurs réels. Mais nous reviendrons dans un autre article sur le cas des facteurs imaginaires.

Développement de la formule $\int \frac{Q\,d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}$.

(8). Nous représenterons dorénavant le radical $\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}$ par Δ, et aussi par $\Delta(\phi)$ et $\Delta:(c, \phi)$, lorsqu'on le regardera comme fonction de ϕ, ou comme fonction de c et ϕ.

Considérons d'abord le cas où Q seroit une fonction entière, et soit $Q = A + B \sin.^2 \phi + C \sin.^4 \phi + \text{etc.}$; si on représente pour abréger l'intégrale $\int \frac{\sin.^{2k} \phi . d\phi}{\Delta}$ par Z^{2k}, on aura

$$\int \frac{Q\,dx}{\Delta} = AZ^0 + BZ^2 + CZ^4 + \text{etc.}$$

Mais en différentiant la quantité $\Delta \cos. \phi \sin.^{2k-3} \phi$, on trouve aisément la formule.

$$\Delta \cos. \phi \sin.^{2k-3} \phi = (2k - 3) Z^{2k-4} - (1 + c^2) \times (2k - 2) Z^{2k-2} + c^2 (2k - 1) Z^{2k};$$

D'où il suit que Z^4, Z^6, etc. peuvent s'exprimer au moyen de Z^0 et Z^2, et qu'ainsi dans le cas où Q est une fonction

entière, l'intégrale $\int \frac{Q\,d\phi}{\Delta}$ est égale à une quantité algébrique, plus une intégrale de la forme $\int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$.

(9). Soit maintenant Q une fonction quelconque rationelle de $\sin.^2 \phi$; après avoir extrait la partie entière, et l'avoir traitée comme il vient d'être dit, le développement de la partie fractionnaire pourra toujours se faire de manière que chaque fraction partielle soit de la forme $\frac{N}{(1 + n \sin.^2 \phi)^k}$, n et N étant des coëfficiens constans réels ou imaginaires. Il s'agira donc de réduire la formule $\int \frac{d\phi}{(1 + n \sin.^2 \phi)^k \Delta}$, et toutes les semblables aux formules les plus simples de la même espèce. Or, si on fait pour un moment $\sin. \phi = x$, cette formule deviendra

$$\int \frac{dx}{(1 + nx^2)^k \sqrt{[1 - (1 + c^2)\, x^2 + c^2 x^4]}}.$$

Considérons, pour plus de généralité, la formule

$$\Pi^k = \int \frac{dx}{(1 + nx^2)^k R},$$

dans laquelle R représente le radical $\sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}$, on trouvera, toujours par la différentiation,

$$\frac{xR}{(1 + nx^2)^{k-1}} = (2k-2)\left(\alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right)\Pi^k - (2k-3)\left(\alpha - \frac{2\beta}{n} + \frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi$$
$$+ (2k-4)\left(-\frac{2\beta}{n} + \frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi^{k-2} - (2k-5)\frac{\gamma}{n^2}\Pi^{k-3}.$$

De-là il résulte que le terme Π^k et tous les semblables où k est plus grand que l'unité, peuvent s'exprimer en partie algébriquement, en partie par les quantités Π^1, Π^0, Π^{-1}, qui sont les plus simples de leur espèce. On peut même observer que si $1 + nx^2$ étoit diviseur de la quantité sous le radical, auquel cas on auroit $\alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} = 0$, alors la

formule précédente auroit un terme de moins, et ainsi la quantité Π^k ne dépendroit plus que des deux Π° et Π^{-1}.

Donc la détermination de Π^k dépendra en général de la formule

$$\int \left(\frac{A}{1 + n x^2} + B + C x^2 \right) \frac{dx}{R},$$

et en particulier lorsque $1 + n x^2$ sera diviseur de R^2, on pourra faire disparoître ce dénominateur, et la détermination de Π^k ne dépendra plus que de la formule $\int (B + C x^2) \frac{dx}{R}$.

(10). L'application de ce résultat à l'intégrale $\int \frac{d\phi}{(1 + n \sin.^2 \phi)^k \Delta}$ fait voir qu'en général cette intégrale dépendra de la suivante,

$$\int \left(\frac{A}{1 + n \sin.^2 \phi} + B + C \sin.^2 \phi \right) \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Et dans le cas particulier où $1 + n \sin.^2 \phi$ sera facteur de $\cos^2 \phi . \Delta^2$, l'intégrale pourra être débarrassée du dénominateur, et ne dépendra plus que de la formule entière

$$\int (B + C \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Ce cas particulier aura lieu si $n = -1$, et si $n = -c^2$, alors les formules sont $\int \frac{d\phi}{\cos.^{2k} \phi . \Delta}$, et $\int \frac{d\phi}{\Delta^{2k+1}}$, et il est facile en effet de réduire l'une et l'autre à une partie algébrique, plus une intégrale de la forme $\int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$. On peut ajouter à ces deux cas celui de $\int \frac{d\phi}{\sin.^{2k} \phi . \Delta}$, qui est susceptible d'une semblable réduction, et qu'on effectuera par la formule de l'article 8.

Il résulte de cette analyse, que la formule générale $\int \frac{Q\, d\phi}{\Delta}$, réduite convenablement, contiendra; 1°. une partie algébrique

brique; 2°. une intégrale de la forme $\int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$, 3°. une ou plusieurs parties de la forme $\int \frac{N}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}$, dans chacune desquelles les coëfficiens N et n auront des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires.

Définition des transcendantes elliptiques, et leur division en trois espèces.

(11). Puisque les transcendantes que nous avons considérées se réduisent toujours à ces deux formes $\int (A + B \sin^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$, $\int \frac{d\phi}{(1 + n \sin.^2 \phi)\Delta}$, il est clair qu'elles sont comprises dans la formule générale

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Nous appellerons désormais, *fonctions* ou *transcendantes elliptiques*, les intégrales comprises dans cette formule. La transcendante H sera supposée s'évanouir ou commencer lorsque $\phi = 0$; son étendue sera déterminée par la variable ϕ, qu'on appellera *l'amplitude*; la constante c, toujours plus petite que l'unité, s'appellera *le module*; enfin $\sqrt{(1 - c^2)}$, que nous désignerons constamment par b, pourra s'appeller *le complément du module*.

La quantité H, lorsqu'on ne considère que la variabilité de ϕ, peut se désigner par $H(\phi)$; si on considère à la fois la variation du module et de l'amplitude, on peut la représenter par $H(c, \phi)$, et ainsi de suite, si on vouloit avoir égard à l'inégalité des coëfficiens.

(12). Il suffit de connoître toutes les valeurs de H, depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, et on connoîtra facilement la valeur de cette transcendante pour une amplitude quel-

C

conque. En effet, soit $\phi = i\pi \pm \alpha$, i étant un entier et α un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$, alors on aura

$$H(\phi) = 2i\, H\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm H(\alpha).$$

Il en est à cet égard de la fonction H comme des arcs d'ellipse, et en général des arcs de toutes les courbes ovales composées de quatre parties égales et semblables : un arc, quelque grand qu'il soit et renfermant, si l'on veut, plusieurs circonférences, s'exprime toujours sans difficulté par le quart de la courbe et une portion de ce quart. La fonction déterminée $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est en quelque sorte l'unité des fonctions H : nous la désignerons par H^1.

Il ne paroît pas que la fonction H prise dans toute sa généralité, puisse se réduire à des arcs d'ellipse ; cela n'a lieu que lorsque $n = 0$, ou lorsque quelque substitution peut faire disparoître le dénominateur $1 + n \sin.^2 \phi$, ce que nous ne croyons pas possible en général. Ainsi la dénomination de fonction elliptique est impropre à quelques égards ; nous l'adoptons néanmoins à cause de la grande analogie qu'on trouvera entre les propriétés de cette fonction et celles des arcs d'ellipse.

(13). Lorsque $n = 0$, ou lorsqu'une substitution convenable peut faire disparoître le dénominateur $1 + n \sin.^2 \phi$, alors la fonction H se simplifie considérablement. Il convient donc de la désigner par une autre initiale G : ainsi nous ferons désormais

$$G = \int \frac{(A + B \sin.^2 \phi)\, d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}.$$

La fonction G, comme nous le démontrerons ci-dessous, s'exprime toujours facilement par deux arcs d'ellipse, et

quant aux arcs d'ellipse eux-mêmes, ils sont représentés par la formule

$$E = \int d\phi \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)},$$

sur quoi *voyez les Mémoires de l'Académie, année* 1786.

Enfin, eu égard à la simplicité analytique, la formule $\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}$ est extrêmement remarquable, et il est nécessaire de la désigner par un caractère particulier, ainsi nous ferons

$$F = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}},$$

cette fonction F peut, à plus forte raison, s'exprimer par deux arcs d'ellipse; mais elle peut aussi s'exprimer par l'arc E, et sa différence partielle relative au module c; car il est visible qu'on a

$$F = E - c \frac{dE}{dc}.$$

Cette expression seroit même, à notre avis, la plus commode pour le calcul numérique des intégrales, si on avoit des tables d'arcs d'ellipse, et qu'à côté de chaque arc on y ajoutât la valeur du coëfficient $\frac{dE}{dc}$.

Quoi qu'il en soit, la quantité F peut bien s'exprimer par E, mais non pas E par F, et encore moins G par F; et c'est, ce me semble, une preuve certaine que la fonction F, considérée analytiquement, est moins composée que les arcs d'ellipse. Si on soumettoit à la même épreuve les arcs d'hyperbole, on trouveroit qu'ils sont absolument de la même nature que les arcs d'ellipse; car de même qu'un arc d'hyperbole peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse, de même un arc d'ellipse peut s'exprimer par deux arcs d'hyperbole. C'est ce qui deviendra évident par les valeurs que

Endroit à modifier / F peut s'exprimer en E et E' mais non E en F et E'. Voir l'art. 32

nous donnerons ci-après de ces arcs, et qui d'ailleurs se trouvent dans les Mémoires cités de 1786.

(14). Il y a donc trois espèces distinctes de fonctions ou transcendantes elliptiques. La première et la plus simple est représentée par la formule

$$F = \int \frac{d\phi}{\Delta};$$

la seconde est représentée par la formule

$$G = \int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Celle-ci renferme comme cas particulier, l'arc d'ellipse $E = \int \Delta d\phi$, et l'arc d'hyperbole $Y = \Delta \text{ tang. } \phi - \int (1 - \sin.^2 \phi) \frac{c^2 d\phi}{\Delta}$. Enfin la troisième et la plus composée est représentée par la formule

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}.$$

Dans cette dernière, les coëfficiens A, B, n pourront être imaginaires; mais alors la formule H seroit accompagnée d'une formule semblable, qui n'en différeroit que par le signe de $\sqrt{-1}$, et la somme des deux donnera toujours un résultat réel.

On pourroit aussi, pour éviter les imaginaires, regarder comme une espèce particulière de fonctions elliptiques, la formule

$$K = \int \frac{A + B \sin.^2 \phi + C \sin.^4 \phi}{1 + 2n \cos. \alpha \sin.^2 \phi + n^2 \sin.^4 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta};$$

mais nous ne jugeons pas nécessaire d'admettre cette quatrième espèce de transcendantes, et nous nous en tenons aux trois autres, fondés sur ce que les calculs par lesquels on détermine la valeur de H sont les mêmes, soit que n soit

réel, soit qu'il soit imaginaire. Ce qui nous paroît seulement indispensable, c'est que le module c soit réel, ainsi que l'amplitude ϕ, et qu'en même temps c soit plus petit que l'unité.

Comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce.

(15). Tous les géomètres connoissent l'intégrale complète algébrique qu'Euler a donnée de l'équation,

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\epsilon y^4)}}=0:$$

cette intégrale sera d'un grand usage dans nos recherches. Et d'abord, en vertu des transformations précédentes, cette équation peut, sans perdre de sa généralité, être mise sous la forme

$$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}+\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}=0;$$

son intégrale est alors $F(\phi)+F(\psi)=$ const. Mais la même intégrale trouvée par la méthode d'Euler, et réduite à la forme la plus simple, est

$$\cos.\phi\cos.\psi-\sin.\phi\sin.\psi\sqrt{(1-c^2\sin.^2\mu)}=\cos.\mu\ldots(a').$$

Dans celle-ci μ est la constante arbitraire, et on voit qu'en faisant $\phi=0$ on a $\psi=\mu$, donc la première devient

$$F(\phi)+F(\psi)=F(\mu):$$

Donc, toutes les fois qu'entre les angles ϕ, ψ, μ, il y aura la relation déterminée par l'équation (a'), la $F(\mu)$ sera égale à la somme des deux $F(\phi)$, $F(\psi)$. Nous abandonnerons ici la considération de l'équation différentielle, pour examiner les conséquences que ce résultat présente par rapport aux fonctions elliptiques de la première espèce.

(16). Etant données deux fonctions elliptiques à volonté $F(\phi)$, $F(\psi)$, on peut trouver une troisième fonction $F(\mu)$ égale à leur somme; il faut pour cela tirer la valeur de μ de l'équation (a'). Or en représentant toujours $\sqrt{(1-c^2 \sin.^2 \phi)}$ par Δ ou $\Delta(\phi)$, et le radical semblable en ψ par $\Delta(\psi)$, on trouve

$$\cos. \mu = \frac{\cos. \phi \cos. \psi - \Delta(\phi)\Delta(\psi) \sin. \phi \sin. \psi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\sin. \mu = \frac{\Delta(\psi) \sin. \phi \cos. \psi + \Delta(\phi) \sin. \psi \cos. \phi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\phi)\Delta(\psi) - c^2 \sin. \phi \sin. \psi \cos. \phi \cos. \psi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\text{tang.} \mu = \frac{\Delta(\psi) \text{tang.} \phi + \Delta(\phi) \text{tang.} \psi}{1 - \Delta(\phi)\Delta(\psi) \text{tang.} \phi \text{tang.} \psi},$$

Remarquons à l'égard de cette dernière formule que si on prenoit les angles ϕ' et ψ', tels que

$$\text{tang.} \phi' = \Delta(\psi) \text{tang.} \phi, \quad \text{tang.} \psi' = \Delta(\phi) \text{tang.} \psi,$$

il en résulteroit

$$\mu = \phi' + \psi',$$

ce qui est un moyen de calculer aisément l'angle μ par les tables des sinus, lorsqu'on connoîtra ϕ et ψ. Mais d'abord il faut calculer $\Delta(\phi)$ et $\Delta(\psi)$: pour cela prenez les angles α et 6 tels que $\sin. \alpha = c \sin. \phi$ et $\sin. 6 = c \sin. \psi$, vous aurez $\Delta(\phi) = \cos. \alpha$, et $\Delta(\psi) = \cos. 6$.

Ces formules feront donc connoître l'amplitude μ de la fonction elliptique, somme des deux fonctions dont ϕ et ψ sont les amplitudes. On peut déduire de-là l'amplitude de la fonction différence de deux autres fonctions; soit

$$F(\phi) - F(\psi) = F(\mu);$$

et l'amplitude μ de la fonction différence se déterminera par celle qu'on voudra des formules suivantes :

$$\cos. \mu = \frac{\cos. \phi \cos. \psi + \Delta(\phi)\Delta(\psi) \sin. \phi \sin. \psi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\sin. \mu = \frac{\Delta(\psi) \sin. \phi \cos. \psi - \Delta(\phi) \sin. \psi \cos. \phi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\phi)\Delta(\psi) + c^2 \sin. \phi \sin. \psi \cos. \phi \cos. \psi}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \psi},$$

$$\text{tang. } \mu = \frac{\Delta(\psi) \text{tang.} \phi - \Delta(\phi) \text{tang.} (\psi)}{1 + \Delta(\phi)\Delta(\psi) \text{tang.} \phi \text{ tang.} \psi}.$$

Dans cette dernière, si on fait tang. $\phi' = \Delta(\psi)$ tang. ϕ et tang. $\psi' = \Delta(\phi)$ tang. ψ, on aura $\mu = \phi' - \psi'$. Ces formules, pour la différence, se déduiroient des formules pour la somme, en changeant simplement dans celles ci le signe de ψ, et conservant $\Delta(\psi)$ positive. Il est inutile d'ailleurs de faire observer l'analogie qui regne entre les valeurs de cos. μ, sin. μ et celles de cos. $(\phi \pm \psi)$, sin. $(\phi \pm \psi)$; elles coïncideroient entièrement si on avoit $c = 0$.

(17). Puisque nous connoissons algébriquement l'amplitude de la fonction égale à la somme ou à la différence de deux fonctions données, il est clair qu'on peut trouver algébriquement une fonction elliptique multiple d'une fonction donnée, et qu'en général on peut résoudre sur la multiplication et division des fonctions elliptiques de la première espèce, les mêmes problêmes qu'on résout sur la multiplication et division des arcs de cercle. Désignons par ϕn l'amplitude de la fonction qui contient n fois la fonction dont l'amplitude est ϕ, ensorte qu'on ait $F(\phi n) = n F(\phi)$; il s'agiroit d'avoir l'expression générale de sin. ou cos. ϕn, par le moyen de sin. et cos. ϕ. Voici quelques recherches à ce sujet.

Les cas extrêmes n'ont aucune difficulté. Si on a $c = 0$, alors $\phi n = n\phi$, et on a la relation connue cos. ϕn + sin. $\phi n \sqrt{-1} = (\cos. \phi + \sin. \phi \sqrt{-1})^n$. Si on a $c = 1$,

alors la F (φ) devient $\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}$, ou $\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)$, de sorte que pour la multiplication des fonctions, on aura cette relation très-simple $\frac{1+\sin.\varphi n}{1-\sin.\varphi n} = \left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)^n$. La difficulté est de trouver l'expression générale de sin. $\varphi\, n$ lorsque c a une valeur quelconque entre 0 et 1.

Considérons d'abord le cas le plus simple, qui est celui de la duplication; alors on a

$$\cos.\varphi 2 = \frac{1 - 2\sin.^2\varphi + c^2\sin.^4\varphi}{1 - c^2\sin.^4\varphi},$$

$$\sin.\varphi 2 = \frac{2\Delta(\varphi).\sin.\varphi\cos.\varphi}{1 - c^2\sin.^4\varphi},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi 2 = \Delta(\varphi).\ \text{tang.}\varphi.$$

La dernière de ces formules paroît commode pour les calculs trigonométriques; car si on prend successivement les angles, α, $\alpha 2$, $\alpha 4$, tels qu'on ait:

$$\sin.\alpha = c\sin.\varphi,\ \sin.\alpha 2 = c\sin.\varphi 2,\ \sin.\alpha 4 = c\sin.\varphi 4,\ \text{etc.}$$

il en résultera

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi 2 = \cos.\alpha\ \text{tang.}\varphi,\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi 4 = \cos.\alpha 2\ \text{tang.}\varphi 2,\ \text{etc.}$$

de sorte que la fonction F sera multipliée par 2, 4, 8, 16, etc.

Si on veut la diviser par les mêmes nombres, nous appellerons par analogie $\varphi\frac{1}{2}$ l'amplitude de la fonction qui est moitié de F, et l'inverse des formules précédentes donnera

$$\sin.\varphi\tfrac{1}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{2}\right)}}.$$

Soit encore sin. $\alpha = c\sin.\varphi$, ce qui donne $\Delta = \cos.\alpha$, on aura en termes fort simples

$$\sin.\varphi\tfrac{1}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi}{\cos.\frac{1}{2}\alpha};$$

Si

Si on fait de même $\sin. \alpha \tfrac{1}{2} = c \sin. \phi \tfrac{1}{2}$, on aura

$$\sin. \phi \tfrac{1}{4} = \frac{\sin. \tfrac{1}{2} \phi \tfrac{1}{2}}{\cos. \tfrac{1}{2} \alpha \tfrac{1}{2}},$$

et ainsi de suite.

(18). Venons à la multiplication et division par un nombre quelconque. Pour cela considérons les trois amplitudes consécutives $\phi \overline{n - 1}$, ϕn, $\phi \overline{n + 1}$, qui, suivant l'indication, répondent aux fonctions $(n - 1) F$, $n F$, $(n + 1) F$. Les formules pour la somme et la différence de deux fonctions, s'appliqueront aux équations $F(\phi \overline{n + 1}) = F(\phi n) + F(\phi)$, $F(\phi \overline{n - 1}) = F(\phi n) - F(\phi)$, et il en résultera

$$\sin. \phi \overline{n + 1} + \sin. \phi \overline{n - 1} = \frac{2 \Delta \cos. \phi \sin. \phi n}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \phi n}$$

$$\cos. \phi \overline{n + 1} + \cos. \phi \overline{n - 1} = \frac{2 \cos. \phi \cos. \phi n}{1 - c^2 \sin.^2 \phi \sin.^2 \phi n}.$$

Ces formules où Δ et ϕ restent constamment les mêmes, tandis que n varie, paroissent aussi commodes qu'il est possible ; pour en tirer les valeurs successives de $\sin. \phi 2$, $\sin. \phi 3$, $\cos. \phi 2$, $\cos. \phi 3$, etc. Ainsi, en faisant pour abréger $2 \Delta \cos. \phi = p$, $1 - c^2 \sin.^4 \phi = q$, $c^2 \sin.^4 \phi = 1 - q = r$, on trouvera

$$\sin. \phi 2 = \frac{p}{q} \sin. \phi,$$

$$\sin. \phi 3 = \frac{p^2 - q^2}{q^2 - r p^2} \sin. \phi,$$

$$\sin. \phi 4 = \frac{(1 + r) p^2 - 2 q^2}{q^4 - r p^4} . p q \sin. \phi,$$

$$\sin. \phi 5 = \frac{q^6 - 3 p^2 q^4 + (1 + 2 r) p^4 q^2 - r^2 p^6}{q^6 - 3 r p^2 q^4 + r (r + 2) p^4 q^2 - r p^6} \sin. \phi,$$

etc.

Mais ces expressions étant entièrement développées, deviennent fort composées, et leur loi est très-difficile à appercevoir.

Lorsqu'il s'agira de calculer trigonométriquemet φn par le moyen de φ, on y parviendra aisément de cette manière. Les deux formules ci-dessus donnent par la division

$$\frac{\sin.\varphi\,\overline{n+1}+\sin.\varphi\,\overline{n-1}}{\cos.\varphi\,\overline{n+1}+\cos.\varphi\,\overline{n-1}}=\Delta\,\text{tang.}\,\varphi\,n,$$

ce qui se réduit à cette formule très-simple

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varphi\,\overline{n+1}+\tfrac{1}{2}\varphi\,\overline{n-1})=\Delta\,\text{tang.}\,\varphi\,n;$$

d'où l'on tire successivement

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,2=\Delta\,\text{tang.}\,\varphi.$$
$$\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\varphi\,3+\tfrac{1}{2}\varphi)=\Delta\,\text{tang.}\,\varphi\,2.$$
$$\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\varphi\,4+\tfrac{1}{2}\varphi\,2)=\Delta\,\text{tang.}\,\varphi\,3,$$
etc.

Or Δ étant toujours le même dans ces formules, on ne peut rien desirer de plus simple pour calculer les valeurs successives de $\varphi\,2$, $\varphi\,3$, etc. par le moyen de φ. On pourroit aussi procéder par de plus grands intervalles au calcul de $\varphi\,m$, m étant aussi grand qu'on voudra; car on a semblablement

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\varphi\,\overline{n+i}+\tfrac{1}{2}\varphi\,\overline{n-i})=\Delta i\,\text{tang.}\,\varphi\,n,$$

Δi étant le Δ qui répond à l'amplitude $\varphi\,i$.

La division d'une fonction elliptique donnée en un certain nombre de parties égales, est un problême algébrique qu'on résoudra par le développement des formules qui servent à la multiplication. On a déjà vu les formules pour diviser par 2 ou par une puissance de 2; supposons qu'on veuille diviser la fonction F en trois parties égales; soit $\varphi\,3$ l'am-

plitude donnée de la fonction F, et ϕ celle de la fonction qui en est le tiers. Nous ferons sin. $\phi 3 = a$, sin. $\phi = x$, et l'équation à résoudre pour la trisection sera

$$a = \frac{3 - 4(1 + c^2)x^2 + 6c^2x^4 - c^4x^8}{1 - 6c^2x^4 + 4c^2(1 + c^2)x^6 - 3c^4x^8}\, x.$$

Cette équation est du neuvième degré; elle seroit du 25ᵉ pour la quintisection, et ainsi de suite.

Les équations sont moins composées de moitié, lorsqu'il s'agit de diviser la fonction entière F 1, dont l'amplitude est de 90°. Supposons en général $\phi n = 90°$, la formule (a') de l'article 15, où l'on peut faire $\mu = 90°$, donnera d'abord cette relation

$$\text{tang.}\, \phi\overline{n - i} = \frac{1}{b} \cot.\, \phi i,$$

de sorte qu'on a successivement tang. $\phi\overline{n - 1} = \frac{1}{b} \cot.\, \phi$, tang. $\phi\overline{n - 2} = \frac{1}{b} \cot.\, \phi\, 2$, tang. $\phi\overline{n - 3} = \frac{1}{b} \cot.\, \phi\, 3$, etc.. Ensuite à cause de $\phi n = 90°$, on a aussi

$$\text{tang.}\,(45° + \tfrac{1}{2}\phi\overline{n - 2}) = \Delta\, \text{tang.}\, \phi\overline{n - 1} = \frac{\Delta}{b} \cot.\, \phi$$

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi\overline{n - 1} + \tfrac{1}{2}\phi\overline{n - 3}) = \Delta\, \text{tang.}\, \phi\overline{n - 2},$$

etc.

De là résulteront des formules assez simples pour déterminer $\phi\overline{n - 1}$, $\phi\overline{n - 2}$, etc. Développant de même celles qui donnent $\phi 2$, $\phi 3$, etc., on aura par la rencontre de ces deux suites, l'occasion d'établir l'égalité qui doit déterminer ϕ; ainsi lorsque $n = 3$, cette équation est immédiatement

$$\text{tang.}\,(45° + \tfrac{1}{2}\phi) = \frac{\Delta}{b} \cot.\, \phi,$$

ou b sin. $\phi = \Delta$ (1 — sin. ϕ), d'où l'on tire, en faisant sin. $\phi = x$,

$$0 = 1 - 2x + 2c^2x^3 - c^2x^4.$$

Équation pour la trisection de la fonction F 1, et dont le degré est seulement 4 ou $\frac{9-1}{2}$.

Lorsque $n=5$, il faudra éliminer $\phi 3$ des deux équations

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi 3) = \frac{\Delta \cos.\phi}{b},$$

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi 3 + \tfrac{1}{2}\phi) = \Delta\, \text{tang.}\, \phi 2.$$

et ensuite mettre au lieu de tang. $\phi 2$ sa valeur $\frac{2\Delta \sin.\phi \cos.\phi}{1-2\sin.^2\phi + c^2 \sin.^4\phi}$. On obtiendra ainsi en faisant $\sin.\phi = x$,

$$\frac{(1+x)\Delta}{bx} = \frac{1+2x-2c^2x^3-c^2x^4}{1-2x+2c^2x^3-c^2x^4},$$

équation pour la quinti-section de la fonction F 1, et qui étant entièrement développée, montera au degré $12 = \frac{25-1}{2}$.

Telles sont les formules par lesquelles on peut trouver la relation entre ϕn et ϕ pour que $F(\phi n) = nF(\phi)$, n étant un nombre entier. S'il falloit trouver la relation entre ϕ et ψ pour que $F(\psi) = \frac{m}{n} F(\phi)$, m et n étant des entiers, on prendroit un angle auxiliaire ω tel que $nF(\psi) = F(\omega)$, et $mF(\phi) = F(\omega)$. La première condition donnera une équation algébrique entre les sinus et cosinus des angles ψ et ω; la seconde, une entre ceux des angles ϕ et ω; d'où éliminant ω, on aura la relation cherchée entre ϕ et ψ.

(19). De-là il résulte qu'on peut toujours trouver l'intégrale algébrique complète de l'équation

$$\frac{m\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}} + \frac{n\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}} = 0;$$

m et n étant des nombres entiers. Car l'intégrale est d'abord $mF(\phi) + nF(\psi) = \text{const.}$, et si on suppose que lorsque $\phi = 0$, $\psi = \mu$, la constante sera $nF(\mu)$, et ainsi on aura

$$mF(\phi) + nF(\psi) = nF(\mu).$$

Or, on peut avoir une équation algébrique qui représente cette équation transcendante; car si on fait $F(\omega)=F(\mu)-F(\psi)$, ce qui donnera $mF(\phi)=nF(\omega)$; chacune de ces équations pourra s'exprimer en termes algébriques, et ainsi en éliminant ω, on aura l'intégrale algébrique complète de l'équation proposée.

En général, si on avoit l'équation suivante dans laquelle m, n, p, etc. sont des entiers positifs ou négatifs, et dont le nombre des termes est à volonté, pourvu qu'il ne soit pas infini

$$0=\frac{m\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}+\frac{n\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}+\frac{p\,d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\omega)}}+\text{etc},$$

l'intégrale complète sera $F(\mu)=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+$etc., μ étant la constante arbitraire. Or, cette équation transcendante peut toujours se changer en une équation algébrique; car en faisant $F(\phi')=mF(\phi)$, $F(\psi')=nF(\psi)$, $F(\omega')=pF(\omega)$, etc., ce qui donne $F(\mu)=F(\phi')+F(\psi')+F(\omega')+$etc., chacune de ces équations pourra être changée en une équation algébrique, et si on élimine ϕ', ψ', ω', etc., l'équation résultante renfermera l'arbitraire μ, et sera l'intégrale algébrique complète de la proposée.

Si on appelle $R(x)$ le radical $\sqrt{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$, $R(y)$ un radical semblable en y, etc. et que m, n, p, etc. désignent toujours des nombres entiers positifs ou négatifs, il est clair que l'équation

$$0=\frac{m\,dx}{R(x)}+\frac{n\,dy}{R(y)}+\frac{p\,dz}{R(z)}+\text{etc.}$$

pourra toujours être réduite à la forme précédente, et qu'ainsi elle aura toujours une intégrale algébrique complète.

Rien n'empêcheroit de supposer que z et les variables suivantes fussent des fonctions algébriques données de x

et y; alors l'équation précédente ne renfermeroit que deux variables, et malgré l'infinité de formes dont elle seroit susceptible, elle admettroit toujours une intégrale algébrique complète. Il me semble que l'on n'a pas encore fait attention à cette manière de généraliser le résultat d'Euler concernant l'équation $\frac{dx}{R(x)} + \frac{dy}{R(y)} = 0$. Un grand géomètre s'est proposé, *Mém. de Turin, tome IV*, de trouver des cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, dans laquelle X est un polynome en x, et Y un polynome en y; mais il ne paroît pas que ses recherches l'aient conduit au-delà de l'équation d'Euler, car l'équation qu'il donne, page 119, comme étant plus générale, s'y ramène immédiatement en faisant $v = ky$, et donnant au coëfficient k une valeur convenable. Ainsi il est très-douteux qu'avec deux termes seulement l'équation d'Euler puisse être généralisée, mais avec un plus grand nombre on voit qu'elle admet une grande extension.

(20). Puisque les fonctions F peuvent être multipliées ou divisées à volonté, cette propriété peut servir à les évaluer par approximation. D'abord nous supposerons que ϕ ne surpasse pas 90°, car nous avons fait voir (art. 12) que tous les cas se réduisent à celui-là. Cela étant, on déterminera $\phi\frac{1}{2}$ par l'art. 17, de manière que $F(\phi\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}F(\phi)$, et l'intégrale $\int \frac{d\phi\frac{1}{2}}{\Delta(\phi\frac{1}{2})}$ aura une étendue moindre que $\int \frac{d\phi}{\Delta(\phi)}$ de près de moitié, si $c \sin \phi$ n'est pas trop près de l'unité. Par une seconde bisection, on peut faire ensorte que $F(\phi\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}F(\phi)$, et l'intégrale $\int \frac{d\phi\frac{1}{4}}{\Delta(\phi\frac{1}{4})}$ aura encore une étendue près de deux fois moindre, et ainsi de suite. Mais lorsque l'amplitude ϕ est devenue très-petite, la $F(\phi)$ se réduit sensiblement à l'arc ϕ. Donc quelle que soit la première valeur de ϕ, la fonction correspondante $F(\phi)$ sera égale au dernier terme de la suite $2\phi\frac{1}{2}$, $4\phi\frac{1}{4}$, $8\phi\frac{1}{8}$, etc, et dans la plupart des cas on obtiendra cette limite par un calcul assez court.

Exemple.

Soit proposé de trouver la valeur de F lorsque $c = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)} = \sin. 75°$, et tang. $\varphi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$; on trouvera en se servant des formules de l'art. 17, et opérant par les tables de Gardiner, ce qui suit :

$\varphi =$	47°	3′	30″,91	$\alpha =$	45°	0′	0″,00
$\varphi \frac{1}{2} =$	25	36	5,64	$\alpha \frac{1}{2} =$	24	40	10,94
$\varphi \frac{1}{4} =$	13	6	30,985	$\alpha \frac{1}{4} =$	12	39	15,83
$\varphi \frac{1}{8} =$	6	35	40,741	$\alpha \frac{1}{8} =$	6	22	8,4
$\varphi \frac{1}{16} =$	3	18	8,748	etc.			
etc.							

Les deux dernières valeurs donnent

$$8\varphi \frac{1}{8} = 52° \; 45' \; 25'',93,$$
$$16\varphi \frac{1}{16} = 52 \; 50 \; 19,97.$$

Leur différence est 4′ 54″,04 ; et comme par la nature de ces approximations, un résultat doit approcher de la limite environ quatre fois plus que le précédent, nous ajouterons au dernier résultat le tiers de la différence 4′ 54″,04, qui est 1′ 38″,01, et nous aurons ainsi pour la valeur de F l'arc très-approché

$$52° \; 51' \; 57'',98,$$

qui en parties du rayon $= \frac{\pi}{2} \times 0,5874012 = 0,9226877$.

Cette méthode pourroit devenir très-longue dans quelques cas : nous en donnerons ci-dessous une beaucoup plus expéditive.

Remarque sur le mouvement du pendule simple.

(21). Nous avons fait voir dans les Mém. de l'Acad. année 1786, page 637, qu'il y a deux cas dans le mouvement d'un pendule simple; l'un, dans lequel il fait simplement des oscillations autour de la verticale; l'autre, où il tourne sans cesse dans le même sens. Mais comme les deux cas conduisent à la même formule, nous considérerons simplement celui des oscillations. Soit donc 1 la gravité, l la longueur du pendule, h la hauteur due à la vîtesse au point le plus bas, φ l'angle dont le pendule est éloigné de la verticale au bout du temps t; soit de plus $\frac{h}{2l}=c^2$, et $\sin. \frac{1}{2}\varphi = c \sin. \psi$, on aura $t=\sqrt{l}. \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2 \sin.^2 \psi)}}$, et par conséquent $t=\sqrt{l}. \text{F}(\psi)$. Ainsi, le temps employé à parcourir un arc quelconque est une fonction elliptique de la première espèce, et il jouit de toutes les propriétés de ces fonctions. On voit donc qu'étant donné un arc parcouru dans le tems t, on pourra trouver algébriquement un autre arc parcouru dans un temps multiple de t, ou en général commensurable avec t. On peut aussi trouver un arc tel que le temps, par cet arc, soit égal à la somme ou à la différence des temps par plusieurs autres arcs donnés, et cela soit que ces arcs aboutissent à la verticale, soit qu'ils n'y aboutissent pas. Ces propriétés sont nouvelles et curieuses, et il ne paroît pas que personne ait remarqué qu'on pouvoit comparer algébriquement les temps des portions d'oscillation comme on compare les arcs-de-cercle. Pour en donner un exemple fort simple, soit proposé de diviser en deux parties égales le temps de la demi-oscillation. Nous appellerons φ l'arc compté depuis la verticale jusqu'au point qui répond au milieu de la demi oscillation, et je dis que la corde de l'arc φ sera à la corde de $\frac{1}{2}a$ comme $\sqrt{2}$ est à 1. En effet, puisqu'on doit avoir $\text{F}(\psi)=\frac{1}{2}\text{F}(90^\circ)$, la formule de

de l'article 17 donnera $\sin.^2\psi = \frac{1}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$, et par conséquent $\sin.^2 \frac{1}{2}\phi = \frac{c^2}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$. Mais il est aisé de voir qu'on a $c = \sin. \frac{1}{2}a$, donc $\sin.^2 \frac{1}{2}\phi = 1 - \cos. \frac{1}{2}a = 2\sin.^2 \frac{1}{4}a$ donc $2\sin. \frac{1}{2}\phi : 2\sin. \frac{1}{4}a :: \sqrt{2} : 1$.

Comparaison des fonctions elliptiques de la seconde espèce.

(22). Considérons deux fonctions elliptiques de la seconde espèce, qui ne diffèrent que par les amplitudes ϕ et ψ, ensorte qu'on ait

$$G(\phi) = \int \frac{(A + B\sin.^2\phi)\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}, \quad G(\psi) = \int \frac{(A+B\sin.^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}.$$

Supposons que les angles ϕ et ψ ont entr'eux la relation comprise dans l'équation $F(\phi) + F(\psi) = F(\mu)$, μ étant une constante, ce qui donne

$$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}} = 0;$$

il en résultera $G(\phi) + G(\psi) = \int \frac{B(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}} + \text{const.}$

Mais lorsque $\phi = 0$, on a $\psi = \mu$; ainsi, en supposant l'intégrale prise depuis $\phi = 0$, on aura

$$G(\phi) + G(\psi) = G(\mu) + \int B(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\frac{d\phi}{\Delta(\phi)}.$$

Or, l'équation $F(\phi) + F(\psi) = F(\mu)$ revient à l'équation (α') de l'art. 15, et de celle-ci on tire, après quelques réductions,

$$d\phi\,\Delta(\phi) + d\psi\,\Delta(\psi) = c^2 \sin.\mu\, d(\sin.\phi \sin.\psi).$$

D'ailleurs on a $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$, donc $(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\frac{d\phi}{\Delta} = -\sin.\mu\, d(\sin.\phi \sin.\psi)$. Donc enfin

$$G(\phi) + G(\psi) - G(\mu) = -B\sin.\mu \sin.\phi \sin.\psi.$$

On voit par-là que la même relation entre les angles ϕ, ψ, μ, qui donne $F(\phi)+F(\psi)-F(\mu)=0$, donne $G(\phi)+G(\psi)-G(\mu)$, sinon nulle, au moins égale à une quantité algébrique fort simple. Cette équation est la source d'une multitude de conséquences analogues à celles qui ont lieu pour la fonction F. Si on désigne comme ci-dessus par $\phi 2$, $\phi 3$, $\phi 4$, etc. les amplitudes telles que $F(\phi 2)=2F(\phi)$, $F(\phi 3)=3F(\phi)$, etc., on aura en vertn de cette équation,

$$G(\phi 2)-2G(\phi)=B\sin.\phi\sin.\phi\sin.\phi 2,$$
$$G(\phi 3)-3G(\phi)=B\sin.\phi(\sin.\phi\sin.\phi 2+\sin.\phi 2\sin.\phi 3),$$
$$G(\phi 4)-4G(\phi)=B\sin.\phi(\sin.\phi\sin.\phi 2+\sin.\phi 2\sin.\phi 3+\sin.\phi 3\sin.\phi 4),$$
etc.

Donc la même relation entre ϕn et ϕ qui donne $F(\phi n)=nF(\phi)$, donnera $G(\phi n)-nG(\phi)$ égale à une quantité algébrique.

(23). On voit, sans entrer dans de plus grands détails, que si m, n, p, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on peut faire ensorte que

$$mG(\phi)+nG(\psi)+pG(\omega)+\text{etc.}$$

soit égale à une quantité algébrique : il faut pour cela établir entre les angles ϕ, ψ, ω, etc. la relation qui donne

$$0=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+\text{etc.}$$

Nous observerons que les fonctions $F(\phi)$, $G(\phi)$, sont en général du même signe que ϕ; lorsque ϕ change de signe, elles en changent aussi, en conservant la même valeur. Cela posé, on peut satisfaire à l'équation

$$0=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+\text{etc.}$$

de bien des manières différentes, car on est maître de changer à volonté le signe de chaque coefficient, pourvu qu'on

change en même-temps le signe de l'amplitude correspondante. Mais on peut se borner à considérer les fonctions $F(\phi)$, $F(\psi)$, $G(\phi)$, etc. comme toujours positives, et dans ce cas il n'y aura jamais qu'une relation entre les angles, ϕ, ψ, ω, etc. qui donnera $0 = m\,F(\phi) + n\,F(\psi) + p\,F(\omega) +$ etc.: alors on voit que les coëfficiens m, n, p, etc. ne sauroient être tous positifs.

Tout ce que nous venons de démontrer de la fonction G en général, s'applique aux arcs d'ellipse en particulier, et s'étend facilement aux arcs d'hyperbole. Les résultats s'accordent avec ceux que nous avons trouvés dans le volume cité de 1786; mais l'ensemble de ces propriétés se fait mieux sentir ici par les rapports entre les fonctions elliptiques de la seconde espèce et celles de la première. Nous allons voir que les fonctions de la troisième espèce jouissent de propriétés semblables, avec cette gradation que la différence qui est nulle dans les fonctions de la première espèce, algébrique dans celles de la seconde, est transcendante dans celles de la troisième, mais peut toujours se déterminer par les arcs de cercle et les logarithmes.

Comparaison des fonctions elliptiques de la troisième espéce.

(24). La formule générale de ces fonctions est

$$H(\phi) = \int \frac{A + B\sin^2\varphi}{1 + n\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\phi)};$$

si on considère une fonction semblable en ψ, et qu'on suppose entre ϕ, ψ et la constante μ, l'équation $F(\phi) + F(\psi - F(\mu) = 0$, il en résultera, à cause de $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$,

$$H(\phi) + H(\psi) - H(\mu) = \int \left\{ \frac{A + B\sin^2\phi}{1 + n\sin^2\phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{A + B\sin^2\psi}{1 + n\sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} \right\}$$

$$= \int \frac{(B - An)(\sin^2\varphi - \sin^2\psi)}{1 + n(\sin^2\varphi + \sin^2\psi) + n^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Soit $\sin.^2 \phi + \sin.^2 \psi = p$, $\sin. \phi \sin. \psi = q$; nous avons déja trouvé (article 22), $(\sin.^2 \phi - \sin.^2 \psi) \frac{d\phi}{\Delta} = - \sin. \mu\, d(\sin. \phi \sin. \psi)$, ainsi nous aurons

$$\mathrm{H}(\phi) + \mathrm{H}(\psi) - \mathrm{H}(\mu) = \int \frac{(\mathrm{A}n - \mathrm{B}) \sin. \mu\, dq}{1 + np + n^2 q^2};$$

mais l'équation algébrique entre ϕ, ψ, μ est $\cos. \phi \cos. \psi = \Delta(\mu) \sin. \phi \sin \psi + \cos. \mu$: si on l'élève au quarré, et qu'on fasse les substitutions, on en tirera $p = \sin.^2 \mu - 2q \Delta(\mu) \cos. \mu + q^2 c^2 \sin.^2 \mu$, valeur qui étant mise dans la formule précédente, donnera

$$\mathrm{H}(\phi) + \mathrm{H}(\psi) - \mathrm{H}(\mu) = \int \frac{(\mathrm{A}n - \mathrm{B}) \sin. \mu\, dq}{1 + n \sin.^2 \mu - 2nq \Delta(\mu) \cos. \mu + q(n^2 + nc \sin.^2 \mu)},$$

l'intégrale qui reste dans celle-ci devant être prise depuis $q = 0$.

De cette équation, et de toutes celles qu'on peut former de la même manière entre trois fonctions, nous conclurons que si m', n', p', etc sont des entiers positifs ou négatifs, on peut toujours faire ensorte que

$$m' \mathrm{H}(\phi) + n' \mathrm{H}(\psi) + p' \mathrm{H}(\omega) + \text{, etc.}$$

soit égale à une quantité déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes. Il faut pour cela établir entre les amplitudes ϕ, ψ, ω, etc. la relation qui donne

$$m' \mathrm{F}(\phi) + n' \mathrm{F}(\psi) + p' \mathrm{F}(\omega) + \text{, etc.} = 0.$$

Ce résultat ne souffre aucune exception ; il auroit lieu même quand les coëfficiens A, B, n seroient imaginaires. Mais on peut considérer ces propriétés sous un point de vue plus général.

(25). Soit P ou $\mathrm{P}(\phi)$ une fonction rationelle paire de $\sin. \phi$, et soit

$$\mathrm{Z}(\phi) = \int \frac{\mathrm{P}(\phi)\, d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}},$$

soit $Z(\psi)$ une fonction semblable à $Z(\phi)$, et supposons toujours qu'on a l'équation $\cos.\phi \cos.\psi = \Delta(\mu) \sin.\phi \sin.\psi + \cos\mu$, laquelle en supposant μ constant donne $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$, on aura donc

$$Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu) = \int \{ P(\phi) - P(\psi) \} \frac{d\phi}{\Delta(\phi)}.$$

Faisons comme ci dessus $\sin.^2\phi + \sin.^2\psi = p$, $\sin.\phi \sin.\psi = q$, il en résultera

$$\sin.^2\phi = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)}$$
$$\sin.^2\psi = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)}.$$

Substituons maintenant la valeur de $\sin.^2\phi$ dans P, le résultat sera de la forme

$$P(\phi) = M + N\sqrt{(p^2 - 4q^2)},$$

M et N étant des fonctions rationelles de p et q. Il est clair qu'on aura de même

$$P(\psi) = M - N\sqrt{(p^2 - 4q^2)};$$

donc $P(\phi) - P(\psi) = 2N\sqrt{(p^2 - 4q^2)} = 2N(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)$, et ainsi l'intégrale $\int \{ P(\phi) - P(\psi) \} \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \int 2N(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi) \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = -2\sin.\mu \int N\, dq$; donc enfin

$$Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu) = -2\sin.\mu \int N\, dq.$$

Dans cette formule, N est une fonction rationelle de p et q; si on y substitue la valeur de p trouvée dans l'art. 24, N sera une fonction rationelle de q seule, et ainsi la valeur de $Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu)$ pourra toujours se déterminer par les arcs de cercle et les logarithmes.

En général, si m', n', p', etc. désignent des nombres

entiers positifs ou négatifs, et qu'on établisse entre les angles φ, ψ, ω, etc. la relation $0 = m' F(\varphi) + n' F(\psi) + p' F(\omega)$, cette même relation donnera

$$m' Z(\varphi) + n' Z(\psi) + p' Z(\omega) + \text{etc.}$$

égale à une quantité déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes. La même propriété auroit lieu quand même P contiendroit des puissances impaires de sin. φ, car la partie de Z, affectée des puissances impaires, s'intégreroit par les règles ordinaires.

Il en est absolument de même de la fonction

$$Z(x) = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}},$$

P étant une fonction rationelle de x, et on pourra toujours trouver une équation algébrique entre x, y, z, etc. en vertu de laquelle

$$m' Z(x) + n' Z(y) + p' Z(z) + \text{etc.}$$

soit déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes.

Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la première espèce.

(26). La méthode que nous allons suivre est la même que celle dont nous avons fait usage dans le volume cité de 1786, pour ramener la rectification d'un ellipse donnée à celle de deux autres ellipses aussi peu différentes du cercle qu'on voudra. L'esprit de cette méthode consiste à ramener l'intégrale d'une différentielle affectée du radical $\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \varphi)}$ à celle d'une différentielle semblable où le module c soit plus petit que toute quantité donnée.

Dans le cas de la rectification de l'ellipse, le module c représente l'excentricité, et son complément $\sqrt{(1 - c^2)}$, ou b est le demi-petit axe. Nous avons fait voir qu'en supposant

constamment le demi-grand axe $= 1$, toutes les ellipses qui se rectifient ainsi par le moyen de deux d'entre elles, et qui composent une même *suite* ou *famille*, ont des excentricités c, c', c'', etc. formées d'après cette loi.

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},\ c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'},\ c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''},\ \text{etc.}$$

Dans ce sens les excentricités augmentent continuellement, et s'approchent très-rapidement de l'unité ; elles décroissent avec la même rapidité dans le sens contraire. Nous désignerons par c, c^{o}, c^{oo}, etc. la même suite continuée en arrière, ensorte que la suite complète des excentricités qui a d'un côté zéro pour limite, et de l'autre l'unité, soit

$$0 \ldots\ c^{ooo},\ c^{oo},\ c^{o},\ c,\ c',\ c'',\ c''' \ldots\ 1,$$

on aura donc semblablement

$$c = \frac{2\sqrt{c^{o}}}{1+c^{o}},\ c^{o} = \frac{2\sqrt{c^{oo}}}{1+c^{oo}},\ \text{etc.};$$

mais pour déterminer c^{o} par le moyen de c, on fera usage de la formule $c^{o} = \frac{1-\sqrt{(1-c^2)}}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$, ou $c^{o} = \frac{1-b}{1+b}$, et ainsi on aura

$$c^{o} = \frac{1-b}{1+b},\ c^{oo} = \frac{1-b^{o}}{1+b^{o}},\ c^{ooo} = \frac{1-b^{oo}}{1+b^{oo}},\ \text{etc.}$$

C'est par cette loi qu'on déterminera les modules décroissans c^{o}, c^{oo}, c^{ooo}, etc. dont nous ferons un grand usage dans les recherches suivantes. On pourroit y employer les formules

$$b^{o} = \frac{2\sqrt{b}}{1+b},\ b^{oo} = \frac{2\sqrt{b^{o}}}{1+b^{o}},\ \text{etc.}$$

Enfin on donnera ci-après un moyen de les calculer facilement par les tables des sinus.

(27). Cela posé, considérons la formule intégrale $F = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}$, et soit pris une nouvelle variable ϕ° telle que

$$2 \sin.^2 \phi = 1 + c^\circ \sin.^2 \phi^\circ - \Delta^\circ \cos. \phi^\circ;$$

nous venons d'expliquer comment c° se déduit de c; quant à Δ°, il est mis par analogie pour $\sqrt{(1 - c^{\circ 2} \sin.^2 \phi^\circ)}$. Il résultera de cette supposition :

$$2 \cos.^2 \phi = 1 - c^\circ \sin.^2 \phi^\circ + \Delta^\circ \cos. \phi^\circ$$

$$\Delta = \frac{c^\circ \cos. \phi^\circ + \Delta^\circ}{1 + c^\circ},$$

$$2 \sin. \phi \cos. \phi = \sin. \phi^\circ (c^\circ \cos \phi^\circ + \Delta^\circ);$$

ensuite la valeur de $2 \sin.^2 \phi$ différentiée, donne

$$4 \sin. \phi \cos. \phi \, d\phi = \frac{d\phi^\circ \sin. \phi^\circ}{\Delta^\circ} (c^\circ \cos. \phi^\circ + \Delta^\circ)^2;$$

divisant cette équation par la précédente, on a

$$2 d\phi = \frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ} (c^\circ \cos. \phi^\circ + \Delta^\circ).$$

Donc enfin

$$\frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1 + c^\circ}{2} \cdot \frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ},$$

et en intégrant $\int \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1 + c^\circ}{2} \int \frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ}$ ou simplement $F = \frac{1 + c^\circ}{2} F^\circ$, F° représentant la nouvelle fonction elliptique $\int \frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ}$.

Il est évident que par cette substitution, qui donne un résultat très-simple, on réduit la détermination de la fonction F à celle de la fonction F°, plus facile à évaluer, puisque c° est plus petit que c; et remarquez bien que nous n'avons recours ici qu'à une nouvelle fonction, et non pas à deux, comme dans les arcs d'ellipse, ce qui est beaucoup plus simple.

simple. Il reste à déterminer ϕ° par le moyen de ϕ : or la relation supposée entre ces deux angles donne

$$\sin.\ \phi^{\circ} = \frac{(1+b)\sin.\ \phi\cos.\ \phi}{\Delta},$$

$$\cos.\ \phi^{\circ} = \frac{1-(1+b)\sin.^{2}\phi}{\Delta},$$

$$\text{tang.}\ \phi^{\circ} = \frac{(1+b)\,\text{tang.}\ \phi}{1-b\,\text{tang}^{2}\phi}.$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme très-simple

$$\text{tang.}\ (\phi^{\circ}-\phi) = b\ \text{tang.}\ \phi.$$

Supposons donc qu'après avoir déterminé les modules décroissans c°, $c^{\circ\circ}$, etc. ainsi que leurs complémens, b°, $b^{\circ\circ}$, etc., comme il a été dit dans l'article précédent, on calcule successivement les amplitudes ϕ°, $\phi^{\circ\circ}$, $\phi^{\circ\circ\circ}$, etc. par les formules

$$\text{tang.}\ (\phi^{\circ}-\phi) = b\ \text{tang.}\ \phi,$$
$$\text{tang.}\ (\phi^{\circ\circ}-\phi^{\circ}) = b^{\circ}\ \text{tang.}\ \phi^{\circ},$$
$$\text{tang.}\ (\phi^{\circ\circ\circ}-\phi^{\circ\circ}) = b^{\circ\circ}\ \text{tang.}\ \phi^{\circ\circ},$$
etc.

ce qu'on pourroit faire aussi par les suites

$$\phi^{\circ} = 2\phi - c^{\circ}\sin.2\phi + \tfrac{1}{2}c^{\circ 2}\sin.4\phi - \tfrac{1}{3}c^{\circ 3}\sin.\ 6\phi + \text{etc.}$$

$$\phi^{\circ\circ} = 2\phi^{\circ} - c^{\circ\circ}\sin.2\phi^{\circ} + \tfrac{1}{2}c^{\circ\circ 2}\sin.4\phi^{\circ} - \tfrac{1}{3}c^{\circ\circ 3}\sin.6\phi^{\circ} + \text{etc.}$$
etc.

Alors l'intégrale $\int\frac{d\phi}{\Delta}$ ou la fonction F s'exprimera ainsi :

$$F = \frac{1+c^{\circ}}{2}F^{\circ},$$

$$F = \frac{1+c^{\circ}}{2}.\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}.F^{\circ\circ},$$

$$F = \frac{1+c^{\circ}}{2}.\frac{1+c^{\circ\circ}}{2}.\frac{1+c^{\circ\circ\circ}}{2}.F^{\circ\circ\circ},$$
etc.

Mais lorsque c est devenu très-petit, on a $\Delta = 1$ et $\int \frac{d\phi}{\Delta} = \phi$.
Soit donc Φ la limite des angles ϕ, $\frac{\phi^o}{2}$, $\frac{\phi^{oo}}{4}$, $\frac{\phi^{ooo}}{8}$, etc., limite qu'ils atteindront toujours sensiblement au bout d'un petit nombre de termes, et on aura,

$$F = \Phi\,(1 + c^o)\,(1 + c^{oo})\,(1 + c^{ooo}), \text{ etc.}$$

Lorsque $\phi = 90^o = \frac{1}{2}\pi$, la limite Φ est pareillement $\frac{1}{2}\pi$, de sorte que la valeur de F qui est alors F 1, devient

$$F\,1 = \frac{\pi}{2}\,(1 + c^o)\,(1 + c^{oo})\,(1 + c^{ooo}), \text{ etc.}$$

Le produit constant $(1 + c^o)\,(1 + c^{oo})$, etc. que nous appellerons α, peut aussi se représenter par l'expression :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{c^o}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{oo}}}{c^o} \cdot \frac{2\sqrt{c^{ooo}}}{c^{oo}}, \text{ etc.}$$

et sous cette forme il est aisé à calculer par les tables de logarithmes. α étant connu, on aura en général $F = \alpha\,\Phi$ et $F1 = \alpha \cdot \frac{1}{2}\pi$.

(28). C'est sur-tout dans les applications qu'on reconnoîtra combien ces approximations sont promptes. Pour les faciliter le plus qu'il est possible, observons que si on fait $c = \sin.\mu$, on a $b = \cos.\mu$, et $c^o = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu$, d'où l'on voit que c^o se déduira facilement de c, au moyen de la table des sinus. Faisant de même $c^o = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu = \sin.\mu^o$, ce qui détermine un nouvel angle μ^o, on aura $c^{oo} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu^o$, et ainsi de suite. Lorsqu'on sera parvenu à un c fort petit, pour avoir le suivant, que je représente par c^o, on pourra, pour éviter les angles trop petits, se servir de la formule

$$c^o = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1.3}{4.6}c^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}c^6 + \text{etc.}$$

dont le premier terme, ou tout au plus les deux premiers, suffiront. Quant au calcul des angles ϕ^o, ϕ^{oo}, etc. nous n'avons rien à ajouter à la simplicité de la formule $\text{tang.}(\phi^o - \phi) = b\,\text{tang.}\,\phi$, qui est très-propre pour le calcul trigonométrique, nous observerons seulement que l'angle $\phi^o - \phi$, ainsi déter-

miné par sa tangente, est presque égal à l'angle ϕ, lorsque c est déja très-petit ; car on a sans ambiguité

$$\phi^{\circ} = 2\phi - c^{\circ} \sin. 2\phi + \tfrac{1}{2} c^{\circ 2} \sin. 4\phi - \tfrac{1}{3} c^{\circ 3} \sin. 6\phi + \text{etc.}$$

Il faudra donc prendre pour la valeur de $\phi^{\circ} - \phi$, non pas toujours le plus petit angle que donnent les tables des sinus, mais celui qui approche beaucoup de ϕ, et qui peut être de plusieurs circonférences. Un exemple fera voir que là-dessus il n'y aura jamais ni difficulté ni ambiguité.

EXEMPLE.

On demande la valeur de la fonction F, lorsque $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ et tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Nous choisissons exprès un cas qui est peu favorable pour le calcul, parce que la valeur de c diffère peu de l'unité.

Voici d'abord un tableau qui offre le calcul des c°, $c^{\circ\circ}$, b°, $b^{\circ\circ}$, etc. fait suivant ce qui vient d'être dit.

Valeurs des c et b.						Leurs logarithmes.
c	=	sin.	75°	0′	0″	9,9849438
b	=	cos.	75	0	0	9,4129962
c°	=	tang.²	37	30	0	9,7699610
		sin.	36	4	7,47	
b°	=	cos.	36	4	7,47	9,9075648
$c^{\circ\circ}$	=	tang.²	18	2	3,735	9,0250880
		sin.	6	5	9,36	
$b^{\circ\circ}$	=	cos.	6	5	9,36	9,9975454
$c^{\circ\circ\circ}$	=	tang.²	3	2	34,68	7,4511672
		sin.	0	9	42,90	
$b^{\circ\circ\circ}$	=	cos.	0	9	42,90	9,9999983
$c^{\circ\circ\circ\circ}$	=	$\frac{1}{4}(c^{\circ\circ\circ})^2$				4,3002761
$b^{\circ\circ\circ\circ}$						0,0000000

Ces logarithmes donneront aisément la valeur du produit $\alpha = \frac{2\sqrt{c^0}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0}$, etc., pour lequel il suffira d'employer quatre facteurs, et on aura log. $\alpha = 0{,}2460561$, ou $\alpha = 1{,}7622037$; de là résulte d'abord $F1 = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha = 2{,}7680632$. On trouvera ensuite

$$\begin{array}{llll} \phi = 47^\circ & 3' & 30'',96. \\ \phi^0 = 62 & 36 & 3,12. \\ \phi^{00} = 119 & 55 & 47,69. \\ \phi^{000} = 240 & 0 & 0,18. \\ \phi^{0000} = 480 & 0 & 0,00. \\ \text{etc.} \end{array}$$

Les autres valeurs de ϕ augmenteroient en raison double, d'où il suit que la limite des angles ϕ, $\frac{\phi^0}{2}$, $\frac{\phi^{00}}{4}$, etc. est 30° ou $\frac{\pi}{6}$, et ainsi on a $F = \frac{\pi}{6} \alpha = 0{,}9226877$, comme dans l'art. 20.

Remarquons que, puisque la limite $\phi = 30^\circ = \frac{1}{3} 90^\circ$, on a $F = \frac{1}{3} F1$; cette égalité est au moins approchée, puisque le calcul la donne ainsi ; mais il est facile de s'assurer qu'elle est rigoureuse. En effet, on a vu dans l'art. 18 que l'équation à résoudre pour faire ensorte que $F(\phi) = \frac{1}{3} F1$, est

$$0 = 1 - 2\sin.\phi + 2c^2 \sin.^3\phi - c^2 \sin.^4\phi :$$

or dans le cas présent où $c^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, on trouvera sin. $\phi = \sqrt{3} - 1$, ou tang. $\phi = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}$; donc en effet la fonction F est exactement le tiers de $F(90^\circ)$ ou F 1.

(29) Etant donnée la valeur de ϕ, on voit qu'il est facile de déterminer la fonction F avec toute l'exactitude nécessaire ; réciproquement il peut être utile de déterminer l'amplitude ϕ en supposant connue la valeur de la fonction F,

soit toujours α le produit $(1+c^{o})(1+c^{oo})$, etc., et Φ la limite des angles φ, $\frac{\varphi^{o}}{2}$, $\frac{\varphi^{oo}}{4}$, etc.; puisqu'on a $F = \alpha\Phi$, il en résulte $\Phi = \frac{F}{\alpha}$, ainsi la limite Φ est connue. Supposons qu'on ait calculé les valeurs de c^{o}, c^{oo}, etc. jusqu'à un terme assez petit pour être négligé, et soit, par exemple, ce terme c^{ooooo}, ou pour abréger c^{o5}. Puisqu'on a $\varphi^{o5} = 2\varphi^{o4} - c^{o5}\sin.\,2\varphi^{o4} +$, etc., on aura d'une manière suffisamment exacte $\varphi^{o5} = 2\varphi^{o4}$, et à plus forte raison $\varphi^{o6} = 2\varphi^{o5}$, etc. Donc la limite Φ sera égale à $\frac{1}{16}\varphi^{o4}$, ou bien on aura $\varphi^{oooo} = 16\,\Phi$. Ce dernier φ étant connu, on remontera aux premiers par les équations successives

$$\sin.\,(2\varphi^{ooo} - \varphi^{oooo}) = c^{oooo}\sin.\,\varphi^{oooo}.$$

$$\sin.\,(2\varphi^{oo} - \varphi^{ooo}) = c^{ooo}\sin.\,\varphi^{ooo}.$$

$$\sin.\,(2\varphi^{o} - \varphi^{oo}) = c^{oo}\sin.\,\varphi^{oo}.$$

$$\sin.\,(2\varphi - \varphi^{o}) = c^{o}\sin.\,\varphi^{o}.$$

Équations qui sont toutes de la même forme, et dont la dernière se conclut de l'équation $\tang.\,(\varphi^{o} - \varphi) = b\tang.\,\varphi$.

Ceci s'applique particulièrement à la résolution de l'équation $F(\varphi n) = n\,F(\varphi)$, quelque soit n. Etant donné φ on connoît $F(\varphi)$ et $n\,F(\varphi)$; donc $F(\varphi n)$ sera connu, et de là on tirera φn comme on vient de l'expliquer. Ce moyen n'exigera jamais qu'un petit nombre d'opérations, au lieu que si n étoit un peu grand, ou seulement fractionnaire, les méthodes que nous avons données pour déterminer φn deviendroient très-longues, ou même impraticables, ainsi la méthode actuelle sera presque toujours préférable.

Approximations pour les fonctions elliptiques de la seconde espèce.

(30). La formule de ces fonctions est

$$G = \int (A + B\sin.^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta};$$

si on fait les mêmes substitutions que dans l'article 27, et qu'on prenne

$$A^{\circ} = A + \frac{B}{2},\ B^{\circ} = \frac{Bc^{\circ}}{2},$$

on aura la transformée

$$G = \frac{1+c^{\circ}}{2}\left(-\frac{B}{2}\sin.\phi^{\circ} + G^{\circ}\right),$$

G° étant mis à la place de $\int (A^{\circ} + B^{\circ}\sin.^{2}\phi^{\circ})\frac{d\phi^{\circ}}{\Delta^{\circ}}$. On auroit semblablement par de nouvelles transformations :

$$G^{\circ} = \frac{1+c^{\circ\circ}}{2}\left(-\frac{B^{\circ}}{2}\sin.\phi^{\circ\circ} + G^{\circ\circ}\right)$$

$$G^{\circ\circ} = \frac{1+c^{\circ\circ\circ}}{2}\left(-\frac{B^{\circ\circ}}{2}\sin.\phi^{\circ\circ\circ} + G^{\circ\circ\circ}\right)$$

etc.

Ainsi la formule intégrale G se ramène aisément à celle qu'on voudra des transformées successives G°, $G^{\circ\circ}$, etc. Supposons que cette suite soit continuée jusqu'à un terme G^{μ} très-éloigné ; alors on aura $c^{\mu} = 0$, $\Delta^{\mu} = 1$, et d'abord la valeur de G^{μ} se réduit à $\int (A^{\mu} + B^{\mu}\sin.^{2}\phi^{\mu})\, d\phi^{\mu}$. Observons ensuite que nous avons $B^{\circ} = \frac{Bc^{\circ}}{2}$, et semblablement $B^{\circ\circ} = \frac{B^{\circ}c^{\circ\circ}}{2}$, $B^{\circ\circ\circ} = \frac{B^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{2}$; donc la suite B°, $B^{\circ\circ}$, etc. décroît plus rapidement que la suite c°, $c^{\circ\circ}$, etc. ; et ainsi on peut faire en toute sureté $B^{\mu} = 0$. A l'égard de A^{μ}, puisqu'on a $A^{\circ} = A + \frac{1}{2}B$, $A^{\circ\circ} = A^{\circ} + \frac{1}{2}B^{\circ}$, etc., il en résulte

$$A^{\mu} = A + \frac{B}{2} + \frac{Bc^{\circ}}{4} + \frac{Bc^{\circ}c^{\circ\circ}}{8} + \frac{Bc^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{16} + \text{etc.}$$

Enfin si on appelle, comme ci-dessus, ϕ la limite des angles

ϕ, $\frac{\phi^\circ}{2}$, $\frac{\phi^{\circ\circ}}{4}$, etc., on aura $\Phi = \frac{\phi^\mu}{2^\mu}$, ou $\phi^\mu = 2^\mu\, \Phi$. Donc la valeur de G^μ sera

$$G^\mu = 2^\mu\, \Phi \left(A + \frac{B}{2} + \frac{Bc^\circ}{4} + \frac{Bc^\circ c^{\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right)$$

Maintenant il est aisé de voir que la valeur de G sera composée de deux parties, l'une $= \alpha\, \Phi$, en supposant

$$\alpha = \left(A + \frac{B}{2} + \frac{B\,c^\circ}{4} + \frac{B\,c^\circ c^{\circ\circ}}{8} + \text{etc.}\right)(1 + c^\circ)(1 + c^{\circ\circ})\,\text{etc.},$$

l'autre algébrique ou périodique; savoir:

$$-\left(\frac{1 + c^\circ}{2}\right).\ \frac{B}{2}\sin.\phi^\circ - \left(\frac{1 + c^\circ}{2}\right)\left(\frac{1 + c^{\circ\circ}}{2}\right)\frac{B\,c^\circ}{4}\sin.\phi^{\circ\circ} - \text{etc.}$$

Mais à cause de $1 + c^\circ = \frac{2\sqrt{c^\circ}}{c}$, $1 + c^{\circ\circ} = \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^\circ}$, etc. cette seconde partie peut se mettre sous la forme $-\frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^\circ}}{2}\sin.\phi^\circ\right.$ $\left. + \frac{\sqrt{c^\circ c^{\circ\circ}}}{4}\sin.\phi^{\circ\circ}, \text{etc.}\right)$ Donc la valeur complète de G sera

$$G = \alpha\, \Phi - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^\circ}}{2}\sin.\phi^\circ + \frac{\sqrt{c^\circ c^{\circ\circ}}}{4}\sin.\phi^{\circ\circ} + \frac{\sqrt{c^\circ c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ}}}{8}\sin.\phi^{\circ\circ\circ} + \text{etc.}\right)$$

Et dans le cas où $\phi = 90^\circ$, on aura simplement $G^1 = \alpha . \frac{\pi}{2}$.

Dans les applications il suffira toujours de prendre un très-petit nombre de termes de ces suites, et les termes omis feront connoître à quel degré d'approximation on s'est arrêté.

(31). Ces formules s'appliquent immédiatement à la rectification de l'ellipse. Soit toujours 1 le demi-grand axe, c l'excentricité; considérons l'arc E, dont l'origine est au petit axe, et dont l'extrémité est déterminée par l'ordonnée au grand axe $b \sin.\phi$, et l'abscisse $\cos.\phi$, cet arc sera égal à l'intégrale $\int d\phi \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}$; ainsi en faisant $A = 1$

et $B = -c^2$, on aura $G = E$; d'où il suit que le quart d'ellipse peut s'exprimer par cette suite très-convergente

$$E\,1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c^0}{4} - \frac{c^2 c^0 c^{00}}{8} - \text{etc.}\right)(1+c^0)(1+c^{00}),\text{etc.}$$

La rectification de l'hyperbole est comprise dans les mêmes formules. Soit c le demi-axe transverse, b son conjugué, 1 l'excentricité; soit b^2 tang. ϕ une ordonnée à l'axe transverse, et Υ l'arc d'hyperbole compris depuis le sommet de la courbe jusqu'à cette ordonnée, on aura $\Upsilon = \int \frac{b\,d\phi}{\Delta \cos.^2 \phi} = \Delta$ tang. ϕ $- \int \frac{c^2 d\phi \cos.^2 \phi}{\Delta}$. Cette dernière intégrale, comparée à la formule G donne $A = c^2$, et $B = -c^2$, et ainsi on aura

$$\Upsilon = \Delta \text{ tang. } \phi - G.$$

D'où il s'ensuit que la différence entre l'arc infini d'hyperbole et son asymptote, est égale à $G\,1$, et a pour valeur

$$\frac{\pi}{4} c^2\left(1 - \frac{c^0}{2} - \frac{c^0 c^{00}}{4} - \frac{c^0 c^{00} c^{000}}{8}, \text{etc.}\right)(1+c^0)(1+c^{00})(1+c^{000}),\text{etc.}$$

Il ne paroît pas qu'on puisse trouver rien de plus simple pour la rectification des sections coniques.

(32) Jettons maintenant un coup d'œil sur les rapports qui existent entre ces diverses transcendantes; savoir $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, $E = \int \Delta\, d\phi$, et en général $G = \int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$. D'abord puisque $\sin.^2 \phi = \frac{1 - \Delta^2}{c^2}$, il est clair qu'on aura $G = (A + \frac{B}{c^2})F - \frac{B}{c^2} E$, et ainsi G se déterminera par le moyen de F et de E. Mais on a pareillement $G^0 = (A^0 + \frac{B^0}{c^{02}}) F^0 - \frac{B^0}{c^{02}} E^0$: ces valeurs étant substituées dans l'équation entre G et G^0 (art. 30), où l'on aura soin de remettre les valeurs de A^0 et B^0 en A et B, il en résultera une nouvelle équation, qui

qui aura lieu quels que soient A et B. Cette équation en donnera deux autres, l'une $F = \frac{1+c^\circ}{2} F^\circ$, que l'on connoît déja, l'autre

$$bF = -E + \frac{1+b}{2} E^\circ + \frac{1-b}{2} \sin. \phi^\circ.$$

Celle-ci fait voir que la fonction F de la première espèce peut s'exprimer par les deux arcs d'ellipses E, E°. Il en est donc de même de la fonction G en général et de l'arc d'hyperbole Υ en particulier. On a aussi par la même raison

$$b^\circ F^\circ = -E^\circ + \frac{1+b^\circ}{2} E^{\circ\circ} + \frac{1-b^\circ}{2} \sin. \phi^{\circ\circ}.$$

De ces deux équations on peut éliminer F et F°, puisqu'on a d'ailleurs $F = \frac{1+c^\circ}{2} F^\circ$, et il en résultera cette relation entre les trois arcs E, E°, $E^{\circ\circ}$, pris sur trois ellipses consécutives d'une même suite :

$$(1+c^\circ) E = c^\circ \sin. \phi^\circ - \frac{b^\circ(1-b^\circ)}{4} \sin. \phi^{\circ\circ} + \left(1+\frac{b^\circ}{2}\right) E^\circ - \frac{b^\circ(1+b^\circ)}{4} E^{\circ\circ},$$

Dans le cas où $\phi = 90^\circ$, on a $\phi^\circ = 180^\circ$, $\phi^{\circ\circ} = 360^\circ$, et cette formule devient

$$(1+c^\circ) E^1 = (2+b^\circ) E^{\circ 1} - b^\circ(1+b^\circ) E^{\circ\circ 1};$$

d'où il suit que le quart d'ellipse E^1 se détermine par deux autres quarts d'ellipse E°, $E^{\circ\circ}$, dont les excentricités sont moindres ; et en général il résulte de ces formules que dans la suite d'ellipses formée d'après les excentricités c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc., la rectification d'une ellipse quelconque se ramenera toujours à la rectification de deux autres à volonté. On trouve ces conséquences plus développées dans les Mémoires de l'Académie de 178ı ; mais il n'en résulte pas une méthode d'approximation aussi simple que celle qui a été exposée dans l'art. 30.

Développement particulier de la formule

$$Z = \int \frac{(f + g x^2)\, dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos.\theta + \beta^2 x^4)}}.$$

(33). Cette formule se rencontre assez souvent dans les applications, et d'ailleurs il est nécessaire d'examiner particulièrement le cas des facteurs imaginaires dont nous avons parlé (art. 7).

La variable x est susceptible de toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini; mais comme en faisant $x = \infty$, on a $Z = \int \frac{g}{\beta} dx = \frac{g}{\beta} x$; pour nous débarasser du terme qui peut devenir infini, nous considérerons simplement la formule

$$X = \int \left\{ \frac{(f + g x^2)\, dx}{\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos.\theta + \beta^2 x^4)}} - \frac{g}{\beta} dx \right\},$$

qui par ce moyen aura toujours une valeur finie.

Il s'agit maintenant de transformer cette expression de manière que les facteurs binomes de la quantité sous le radical deviennent réels. Pour cela on peut faire différentes suppositions, qui toutes réussiront également. Par exemple,

$$x = \frac{1-y}{1+y} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

$$\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos.\theta + \beta^2 x^4)} = 2xy\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\alpha + \beta x^2 = 2xy\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\beta x^2 + \alpha \cos.\theta + \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta x^2 \cos.\theta + \beta^2 x^4)} = 2\alpha y^2.$$

Bornons-nous à présenter le résultat de la quatrième supposition; elle donne $x^2 = \frac{\alpha}{\beta}\left(y^2 - \cos.\theta - \frac{\sin.^2\theta}{4y^2}\right)$, et

$$X = \int \frac{\frac{dy}{\sqrt{\alpha\beta}}\left(f - \frac{g\alpha}{\beta}\cos.\theta - \frac{g\alpha \sin.^2\theta}{2\beta y^2}\right)}{\sqrt{[(y^2 - \cos.^2\frac{1}{2}\theta)(y^2 + \sin.^2\frac{1}{2}\theta)]}}$$

où l'on voit qu'en effet les deux facteurs de la quantité sous le radical sont réels. On voit aussi que la moindre valeur de y étant cos. $\frac{1}{2}\theta$, on peut faire $y = \frac{\cos. \frac{1}{2}\theta}{\cos. \varphi}$, et il en résultera, en posant sin. $\frac{1}{2}\theta = c$,

$$X = \int \frac{f6 - g\alpha + 2g\alpha c^2 \sin.^2\varphi}{6\sqrt{6\alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\varphi)}}.$$

Par cette transformation la formule X devient une fonction elliptique de la seconde espèce, à laquelle on peut immédiatement appliquer les formules de l'art. 30, en faisant

$$A = \frac{f6 - g\alpha}{6\sqrt{\alpha 6}},\ B = \frac{2g\alpha c^2}{6\sqrt{\alpha 6}}.$$

Remarquez que nous supposons $\sqrt{\alpha 6}$ réelle; car on peut toujours prendre α et 6 positifs, et si le terme $2\alpha 6 x^2 \cos.\theta$ doit être négatif, on fera tomber le signe — sur cos. θ.

La relation immédiate entre ϕ et x est donnée par l'équation,

$$2\alpha \sin.^2\tfrac{1}{2}\theta \cos.^2\phi = -6x^2 - \alpha\cos.\theta + \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha 6 x^2 \cos.\theta + 6^2 x^4)};$$

d'où l'on voit que lorsque $x = 0$, $\phi = 0$, et lorsque $x = \infty$, $\phi = 90°$. La transformée en ϕ représente donc l'intégrale X, prise depuis $x = 0$ jusqu'à la valeur de x qui correspond à ϕ.

On peut exprimer l'intégrale X par le moyen des deux formules simples $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, $E = \int \Delta d\phi$, et on aura de cette manière

$$X = \frac{f6 + g\alpha}{6\sqrt{\alpha 6}} F - \frac{2g\alpha}{6\sqrt{\alpha 6}} E.$$

Voici quelques applications de cette dernière formule, qui conduiront à des résultats assez remarquables.

EXEMPLE Ier.

(34). Soit proposé d'évaluer les deux intégrales $M = \int \frac{z^{-\frac{2}{3}}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, $N = \int \frac{z^{\frac{1}{3}}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, prises l'une et l'autre depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. On sait que le produit de ces deux intégrales $= \frac{3}{2}\pi$; (*Voyez les Mém. de* 1786, *pag.* 678).

Si on fait dans la première $z = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$, on aura la transformée $M = \int \frac{3\,dx}{\sqrt{(3 + 3x^2 + x^4)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. La comparaison avec la formule X donnera $f = 3$, $g = 0$, $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$, cos $\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $c = \sin.\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$; d'où résulte $M = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}F$, et comme l'intégrale doit être prise depuis $x = 0$, jusqu'à $x = \infty$, ou depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90^\circ$, F deviendra F^1, et l'intégrale totale sera $M = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}F^1$.

Dans la seconde formule nous ferons $z = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, et la transformée sera $N = \int \frac{3\,dx\,(1 - x^2)}{\sqrt{(3 - 3x^2 + x^4)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Cette formule étant comparée à la formule X, on aura $f = 3$, $g = -3$, $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\cos.\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c = \sin.\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$, ce qui donnera

$$N = -3x + \frac{3 - 3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F(\phi) + \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E(\phi);$$

or la relation entre ϕ et x étant

$$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\cos.^2\phi = -x^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{(3 - 3x^2 + x^4)},$$

si on fait $x = 1$, on aura $\cos.^2\phi = 2\sqrt{3} - 3$; ou bien tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Mais nous avons déja vu (art. 28) que dans

le cas où $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ et tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$; on a exactement $F(\phi) = \frac{1}{3}F1$. De là il est aisé de conclure par les formules de l'art. 22, qu'on a $E(\phi) = \frac{1}{3}E1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$, donc l'intégrale N prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, se réduit à cette valeur :

$$N = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E1.$$

Il faut bien remarquer que ces valeurs de F 1 et E 1 répondent à un module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, tandis que la valeur de F 1 qui entre dans M répond à un module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$. Pour distinguer ce dernier module, nous le désignerons par k, et la valeur correspondante de F 1 par F 1 k. Ainsi nous aurons par le produit des deux intégrales, l'équation

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}F1\,k.\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E1\right\},$$

d'où il suit que dans ce cas particulier l'arc d'ellipse E 1, qui est une fonction de la seconde espèce, peut s'exprimer par F 1 et F 1 k, fonctions de la première. Ces calculs sont faits d'une autre manière dans le Mémoire cité, et nous n'en avons tiré alors aucun résultat, faute d'appercevoir que l'arc E peut se déterminer par le tiers de E 1. On rencontrera encore quelque chose de semblable dans l'exemple suivant.

EXEMPLE II.

(35). On propose d'évaluer les deux intégrales $P = \int \frac{z^{-\frac{1}{3}}dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, $Q = \int \frac{z^{\frac{1}{3}}dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$: on sait que leur produit doit être $\frac{3}{4}\pi$.

Si on fait dans la première $z = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, on aura la transformée $P = \int \frac{3dx}{\sqrt{(3-3x^2+x^4)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 0$

jusqu'à $x = 1$. Celle-ci étant comparée à la formule X, on a $f = 3$, $g = 0$, $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, ce qui donne $P = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} F(\phi)$. Quant à la valeur de ϕ, elle se tire de l'équation $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\cos.^2\phi = -x^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{(3 - 3x^2 + x^4)}$; dans laquelle, si on fait $x = 1$, on aura $\cos.^2\phi = 2\sqrt{3} - 3$, ou $\text{tang.}\,\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Ce cas étant celui que nous avons déja rencontré, on en conclura de même $F(\phi) = \frac{1}{3} F\,1$, et par conséquent $P = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} F\,1$.

Venons à la formule Q, et faisons d'abord $z^2 = y^{-3}$, on aura la transformée $Q = \frac{3}{2}\int \frac{dy}{yy\sqrt{(y^3-1)}}$, à intégrer depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$. Intégrant par parties, on aura

$$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{(y^3-1)}}{y} - \frac{3}{4}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^3-1)}}.$$

Soit ensuite $y = 1 + x^2$, et on aura $\frac{3}{4}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^3-1)}} = \frac{3}{2}\int \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}$, formule qu'il faut intégrer depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. Cela posé, la valeur de Q peut se mettre sous cette forme

$$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{(y^3-1)}}{y} - \frac{3}{2}x$$

$$- \frac{3}{2}\int \left\{ \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} - dx \right\};$$

mais la partie hors du signe $\int$ s'évanouit au commencement et à la fin de l'intégrale : ainsi on a simplement

$$Q = -\frac{3}{2}\int \left\{ \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} - dx. \right\}$$

Comparant avec la formule X, on aura $f = -\frac{3}{2}$, $g = -\frac{3}{2}$, $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\cos.\,\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, et comme

l'intégrale doit être prise depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90°$, on aura pour résultat (en distinguant ce second c par k),

$$Q = -\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}\right) F\,1\,k + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} E\,1\,k.$$

Maintenant puisqu'on sait que $PQ = \frac{1}{4}\pi$, cette égalité et celle qu'on a obtenue semblablement dans l'exemple précédent, donneront ces deux résultats,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= F\,1\left(E\,1\,k - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) F\,1\,k\right) \\ \frac{\pi}{4} &= F\,1\,k\left(E\,1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) F\,1\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b').$$

On peut donc dans ce cas exprimer les quarts d'ellipse $E\,1$, $E\,1\,k$, qui sont des fonctions de la seconde espèce, par $F\,1$, $F\,1\,k$, fonctions de la première; et la même chose a lieu par conséquent pour toutes les ellipses dont les excentricités sont comprises, soit dans la suite c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc, soit dans la suite k, k°, $k^{\circ\circ}$, etc., lesquelles suites peuvent aussi être prolongées à l'infini dans l'autre sens. A ces relations, on peut encore joindre celle de $F\,1 = \sqrt{3}\,F\,1\,k$, qui va être démontrée dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

(36). Soit proposé d'intégrer la formule $R = \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$ depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

On fera d'abord $1 - z^3 = \left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$, ce qui donnera $R = \int \frac{dy}{\sqrt{(4y^3+1)}}$, à intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m = \sqrt[3]{4}$ et $my = x^2 - 1$, on aura la transformée $R = \frac{2}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^4 - 3x^2 + 3)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$. Cette intégrale se déduit facilement de la valeur de P dans l'exemple précédent, et on en

tirera $R = \frac{4}{3m\sqrt[4]{3}}$ F 1, le module de F 1 étant toujours $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$. Mais il y a une autre manière de trouver la valeur de R.

Soit $1 - z^3 = \left(1 - \frac{z}{y}\right)^3$, on trouvera d'abord la transformée $R = \int \frac{dy\sqrt{3}}{\sqrt{(4y-1)}}$, qu'il faut intégrer depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m^3 = 4$ et $my = 1 + x^2$, on aura $R = \frac{2\sqrt{3}}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}$, nouvelle formule qu'il faut intégrer depuis $x = \sqrt{\frac{1}{3}}(m-1)$, jusqu'à $x = \infty$. Or, en comparant à la formule X, on a $f = 1$, $g = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$, $\cos.\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; de plus, lorsque $x^2 = 2m - 1$, on a $\cos.^2\phi = \frac{-m-\frac{1}{2}+\sqrt{(m^2+m+1)}}{\sqrt{3}-\frac{3}{2}} = \frac{(m-1)^2}{2\sqrt{3}-3}$.

Or, on trouvera par la trisection (art. 18) que cette valeur de ϕ répond à une fonction $F = \frac{1}{3}F\,1$, d'où il suit que la fonction F, prise depuis cette valeur de ϕ jusqu'à celle de 90°, où l'on a $x = \infty$, sera $F - \frac{1}{3}F\,1$. D'ailleurs cet F 1 doit être désigné par F 1 k, puisque le module est ici $k = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; donc on aura $R = \frac{2\sqrt{3}}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{2}{3}F\,1\,k$. Comparant cette valeur avec celle que nous avons trouvée par l'autre méthode, on aura cette relation très-simple,

$$F\,1 = \sqrt{3}.\ F\,1\,k,$$

laquelle jointe aux deux équations (b'), fait voir qu'une seule des quatre quantités F 1, F 1 k, E 1, E 1 k étant connue, on peut déterminer les trois autres. On aura par exemple,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{4} = F\,1\left\{E\,1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)F\,1\right\}$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}} = F\,1\,k\left\{E\,1\,k - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)F\,1\,k\right\}.$$

On voit aussi qu'une seule ellipse connue dans les deux

suites

suites formées d'après les excentricités c et k, suffit pour déterminer toutes les autres.

Nous insistons sur ces comparaisons, parce qu'il paroît qu'il y a très-peu de cas où elles ont lieu, et où l'on puisse déduire E de F; ici il y a un double rapport entre les E et F d'une suite, et ceux d'une autre suite, formée d'après un autre module, ce qui est encore plus rare et plus remarquable.

Au reste, comme on pouvoit intégrer indéfiniment la formule R par l'une et par l'autre méthode, on voit que la fonction F, pour le module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, se déduira toujours d'une fonction pareille pour le module $k = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, en prenant les amplitudes convenables, et il en seroit de même des ellipses dont c et k sont les excentricités. Ces ellipses entreroient dans l'intégration de la formule $\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{2}}}$, qu'on peut effectuer par les deux mêmes méthodes que celle de la formule R; et ainsi nous connoissons deux suites infinies d'ellipses, telles que la rectification indéfinie d'une seule de ces ellipses donne celle de toutes les autres. Ces réductions tiennent à la nature particulière du radical $\sqrt{(x^4 - 3x^2 + 3)}$, qui est susceptible de se changer en $\sqrt{(x^4 + 3x^2 + 3)}$, mais il ne paroît pas que de telles réductions soient toujours praticables.

Théorème sur les fonctions définies dont les modules sont complément l'un de l'autre.

(37). Dans les comparaisons qu'on vient d'établir, les modules c et k sont tels que $k^2 = 1 - c^2$, ou que $k = b$, et ainsi ils sont complément l'un de l'autre. Si on met b à la place de k, pour mieux se représenter le rapport des fonctions $E^1 b$, $F^1 b$ aux fonctions E^1, F^1, qu'on peut aussi désigner par $E^1 c$, $F^1 c$, les équations (b') étant ajoutées ensemble donneront

$$\frac{\pi}{2} = F^1 c E^1 b + F^1 b E^1 c - F^1 b F^1 c \ldots . (c')$$

Cette équation est démontrée pour le cas de $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$; elle l'est aussi pour le cas de $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, car on auroit alors $b = c$, et elle deviendroit

$$\frac{\pi}{2} = F1\,(2E1 - F1):$$

Or celle-ci se trouve exprimée en d'autres termes dans les Mémoires de 1786, page 678. Mais ces cas ne sont que particuliers, et nous allons prouver que l'équation (c') a lieu en général quelque soit c, ce qui est un théorême nouveau et remarquable sur les intégrales définies.

Pour abréger la notation, ôtons les 1 qui indiquent que les fonctions ont une amplitude de 90°, et ne distinguons les fonctions en b des fonctions en c que par un accent mis sur les premières. Alors l'équation qu'il s'agit de démontrer sera

$$\frac{\pi}{2} = FE' + F'E - FF' \; . \; . \; . \; . \; . \; (d')$$

Je regarde le premier membre comme inconnu, et je l'appelle Π, je différentie ensuite les deux membres par rapport à c, qui est la seule variable qu'ils contiennent. Or, ayant $E = \int \Delta d\phi$, $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, $\Delta^2 = 1 - c^2 \sin.^2 \phi$, il en résulte, par les principes connus, $\frac{dE}{dc} = -\int \frac{c\, d\phi \sin.^2 \phi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E - F)$, et $\frac{dF}{dc} = \int \frac{c\, d\phi \sin.^2 \phi}{\Delta^3} = \frac{1}{c}\int \frac{d\phi}{\Delta^3} - \frac{1}{c}\int \frac{d\phi}{\Delta}$. Mais, par les formules de l'art. 9, on a $\int \frac{d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\int \Delta d\phi - \frac{c^2 \sin.\phi \cos.\phi}{b^2 \Delta}$, et dans le cas de $\phi = 90°$ dont il s'agit, le second terme s'évanouit, et ainsi on aura $\frac{dF}{dc} = \frac{E - b^2 F}{b^2 c}$. Les variations de E' et F' s'exprimeront semblablement par rapport à b, et parce que $bdb + cdc = 0$, on en déduira $\frac{dE'}{dc} = -\frac{1}{b}(E' - F')$ et $\frac{dF'}{dc} = \frac{-E' + c^2 F'}{b^2 c}$. Cela posé, si on différentie l'équation

(d'), dont le premier membre est supposé Π, et qu'on substitue les valeurs qu'on vient de trouver pour dE, dF, etc. on trouvera

$$d\,\Pi = 0.$$

Et ainsi la quantité Π est constante; il suffit par conséquent de la déterminer dans un cas particulier. Soit $c = 0$, ou $b = 1$, on aura $E = F = \frac{1}{2}\pi$, $E' = 1$; quant à F' il est infini, car ayant $F' = \int \frac{d\phi}{\cos.\phi} = \log.\ \text{tang.}\ (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$, si on fait $\phi = 90^\circ$, F' devient infini. Mais comme cet infini est logarithmique, et qu'il est multiplié par $E - F$, qui est zéro, le produit sera encore zéro. Donc le second membre de l'équation (d') se reduit dans ce cas à $\frac{\pi}{2}$, donc il sera toujours égal à $\frac{1}{2}\pi$, et ainsi l'équation (d'), qui est désignée plus précisément par (c') aura lieu, quelque soit c.

Ce théorême donne une relation entre les fonctions $E1$, $F1$; qui appartiennent au module c, et les fonctions semblables pour le module b. Il faudroit une seconde relation de ce genre pour pouvoir déterminer les fonctions de la seconde espèce $E1b$, $E1c$ par celles de la première $F1b$, $F1c$; mais il ne paroît pas qu'on puisse la trouver en général.

Nous avons déja remarqué deux cas où ces réductions ont lieu ; ce nouveau théorême va nous en fournir un troisième. Supposons $b = c^\circ = \frac{1-b}{1+b}$, ce qui donne $b = -1 + \sqrt{2}$, $c^2 = -2 + 2\sqrt{2}$; dans ce cas $E1b$ et $F1b$, deviendront $E^\circ 1$ et $F^\circ 1$, et l'équation (c') donnera

$$\frac{\pi}{2} = F1\,E^\circ 1 + F^\circ 1\,E1 - F1\,F^\circ 1;$$

mais par les formules de l'art. 32, on a $F1 = (1 + c^\circ)\,F^\circ 1 = \sqrt{2}.\,F^\circ 1$ et

$$b\,F1 = -E1 + (1+b)\,E^\circ 1.$$

Observons d'abord que la formule H peut s'écrire ainsi :

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{A}n + \mathrm{B}}{2n} \int \frac{d\phi}{\Delta} + \frac{\mathrm{A}n - \mathrm{B}}{2n} \int \frac{1 - n \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}.$$

La première partie n'ayant aucune difficulté, occupons-nous de la seconde, et faisons :

$$\mathrm{P} = \int \frac{1 - n \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta};$$

faisons en même tems

$$\mathrm{Q} = \int \frac{1 - \frac{c^2}{n} \sin.^2 \phi}{1 + \frac{c^2}{n} \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta},$$

nous aurons, en ajoutant ces deux formules,

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \int \frac{1 - c^2 \sin.^4 \phi}{1 + \left(n + \frac{c^2}{n}\right) \sin.^2 \phi + c^2 \sin.^4 \phi} \cdot \frac{2\, d\phi}{\Delta}.$$

Soit pris maintenant l'angle ψ, tel que $\sin. \psi = \frac{(1 + c) \sin. \phi}{1 + c \sin.^2 \phi}$, et soit fait pour abréger $m = \frac{(n - c)^2}{n(1 + c)^2}$, la substitution donnera,

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \frac{2}{1 + c} \int \frac{d\psi}{1 + m \sin.^2 \psi},$$

et ainsi on a ce résultat très-remarquable :

$$\int \frac{1 - n \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta} + \int \frac{1 - \frac{c^2}{n} \sin.^2 \phi}{1 + \frac{c^2}{n} \sin.^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{2}{1 + c} \int \frac{d\psi}{1 + m \sin.^2 \psi}.$$

Or, des deux nombres n, $\frac{c^2}{n}$ si l'un est plus grand que c, l'autre est certainement plus petit : donc, *on peut toujours ramener la formule intégrale* H, *à une formule semblable dans laquelle* n *soit plus petit que* c.

Ainsi, lorsque n est négatif et plus grand que l'unité, l'in-

convénient qu'à la formule H de devenir infinie pour certaines valeurs de ϕ, se trouve en quelque sorte rejeté sur la transcendante de l'ordre inférieur $\int \frac{d\psi}{1+m\sin.^2\psi}$, et il ne reste plus à considérer qu'une fonction elliptique régulière, dont la valeur est toujours finie.

Remarquons que dans le cas particulier de $n=c$, on a, par une intégration absolue,

$$\int \frac{1-c\sin.^2\phi}{1+c\sin.^2\phi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}=\frac{\psi}{1+c};$$

de même, dans le cas de $n=-c$, si on fait,

$$\sin.\,\omega=\frac{(1-c)\sin.\,\varphi}{1-c\sin.^2\varphi},$$

on aura,

$$\int \frac{1+c\sin.^2\phi}{1-c\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}=\frac{\omega}{1-c}.$$

Ces deux formules sont comprises l'une et l'autre dans celle de l'article 37.

Enfin, si n étoit imaginaire, et de la forme ν (cos. $\alpha+\sqrt{-1}$ sin. α), on voit par la formule générale, que le cas où ν est d'une grandeur quelconque, se rameneroit tout de suite au cas de ν plus petit que c.

(40) Cela posé, procédons à la transformation de la formule H, que nous mettrons sous la forme,

$$H=\int\left(A+\frac{B\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\phi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

et dans laquelle on pourra supposer que n est plus petit que c. Nous ferons à l'ordinaire $\sin.^2\phi=\frac{1}{2}(1+c^\circ\sin.^2\phi^\circ-\Delta^\circ\cos.\,\phi^\circ)$, et la substitution donnera,

$$H=\frac{1+c^\circ}{2}\left\{H^\circ-\frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int\frac{d\phi^\circ\cos.\,\varphi^\circ}{1+n^\circ\sin.^2\varphi^\circ}\right\},$$

formule où l'on a semblablement $H^\circ=\int\left(A^\circ+\frac{B^\circ\sin.^2\phi^\circ}{1+n^\circ\sin.^2\phi^\circ}\right)\frac{d\varphi^\circ}{\Delta^\circ}$.

Θ Donc $\int\frac{\Delta d\varphi}{1+c\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}\psi+\frac{1-c}{2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}$

$\int\frac{\Delta d\varphi}{1-c\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}\omega+\frac{1+c}{2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}$

et où les nouveaux coëfficiens sont :

$$n^{\circ} = \frac{n(n+c^{2})}{(1+b)^{2}(1+n)},$$

$$A^{\circ} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n},$$

$$B^{\circ} = B.\ \frac{c^{2}+2n+n^{2}}{2(1+b)^{2}(1+n)^{2}}.$$

La même loi se continuera dans les transformées ultérieures, de sorte qu'en faisant

$$n^{\circ\circ} = \frac{n^{\circ}(n^{\circ}+c^{\circ 2})}{(1+b^{\circ})^{2}(1+n^{\circ})},$$

$$A^{\circ\circ} = A^{\circ} + \frac{\frac{1}{2}B^{\circ}}{1+n^{\circ}},$$

$$B^{\circ\circ} = B^{\circ}.\ \frac{c^{\circ 2}+2n^{\circ}+n^{\circ 2}}{2(1+b^{\circ})^{2}(1+n^{\circ})^{2}},$$

on aura :

$$H^{\circ} = \frac{1+c^{\circ\circ}}{2}\left\{H^{\circ\circ} - \frac{\frac{1}{2}B^{\circ}}{1+n^{\circ}}\int \frac{d\phi^{\circ\circ}\cos.\phi^{\circ\circ}}{1+n^{\circ\circ}\sin.^{2}\phi^{\circ\circ}}\right\}$$

et ainsi de suite.

(41). Examinons d'abord avec quelque détail la loi de progression des coëfficiens, n, n°, $n^{\circ\circ}$, etc. Si on fait $n = mc$, et semblablement $n^{\circ} = m^{\circ}c^{\circ}$, on aura $m^{\circ} = \frac{m(m+c)}{1+cm}$, ce qui est une formule assez simple pour déduire m° de m, et on déduiroit de même $m^{\circ\circ}$ de m°, etc. Remarquons maintenant que puisqu'on suppose $n < c$, on a $m < 1$. Or, de là il suit qu'on a aussi $m^{\circ} < 1$ et même $m^{\circ} < m$; car soit pour un moment $m^{\circ} = \delta m$, ou $\delta = \frac{m+c}{1+cm}$, il en résulteroit $1 + \delta = \frac{(1+c)(1+m)}{1+cm}$, et $1 - \delta = \frac{(1-c)(1-m)}{1+cm}$; valeurs qui prouvent que $1+\delta$ et $1-\delta$ sont toujours positifs, et qu'ainsi δ est toujours plus petit que l'unité. Donc $m^{\circ} < m$, et par une raison semblable $m^{\circ\circ} < m^{\circ}$, $m^{\circ\circ\circ} < m^{\circ\circ}$, etc.

D'où

D'où l'on voit que les termes, m, m°, $m^{\circ\circ}$, etc., sont non-seulement plus petits que l'unité, mais qu'ils décroissent continuellement. Il en résulte par conséquent que la suite n, n°, $n^{\circ\circ}$, $n^{\circ\circ\circ}$, etc. décroît plus rapidement que la suite c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc. chaque terme de la première étant plus petit que le terme correspondant de la seconde.

A l'égard des signes de ces coëfficiens, il y a deux cas à considérer. 1°. Si n est positif, ou qu'étant négatif il soit plus grand c^2, alors n° sera positif; il en sera donc de même de $n^{\circ\circ}$, et ainsi tous les termes n°, $n^{\circ\circ}$, $n^{\circ\circ\circ}$, etc. sans exception seront positifs. Dans ce premier cas se trouve compris celui de $n = \pm c$, qui donnera $n^{\circ} = c^{\circ}$, $n^{\circ\circ} = c^{\circ\circ}$, et ainsi à l'infini; mais ce cas est inutile à considérer, parce qu'alors on a vu dans l'article 38, que la fonction H se ramène à la première espèce.

2°. Si n est négatif et plus petit que c^2, soit $n = -c^2 \sin.^2 \theta$, On pourra faire de même $n^{\circ} = -c^{\circ 2} \sin.^2 \theta^{\circ}$, et on trouvera que l'angle θ° est réel et déterminé par la formule

$$\text{tang.}\,(\theta^{\circ} - \theta) = b \,\text{tang.}\, \theta,$$

ce qui est la même loi, suivant laquelle ϕ° se déduit de ϕ. Calculant donc successivement θ°, $\theta^{\circ\circ}$, etc. d'après cette loi, on aura $n^{\circ} = -c^{\circ 2} \sin.^2 \theta^{\circ}$, $n^{\circ\circ} = -c^{\circ\circ 2} \sin.^2 \theta^{\circ\circ}$, etc.; d'où l'on voit que dans ce second cas tous les n sont négatifs, et plus petits que les c^2 correspondans, ce qui rend encore plus convergente la suite n, n°, $n^{\circ\circ}$, etc.

(42). Connoissant ainsi la loi de progression des coëfficiens n, venons à celle des coëfficiens A et B. Soit pour abréger

$$k = \frac{c^2 + 2n + n^2}{2(1+b)^2(1+n)^2},$$

et soit désigné par k° une semblable fonction de c° et n°, et ainsi de suite, on aura donc

$$B^{\circ} = k\,B,\; B^{\circ\circ} = kk^{\circ}\,B,\; B^{\circ\circ\circ} = kk^{\circ}k^{\circ\circ}\,B, \text{ etc.}$$

Mais puisqu'à une certaine distance les nombres c et n, qu'on peut désigner par c^μ et n^μ, sont assez petits pour être regardés comme nuls, il est clair que k^μ est dans le même cas, et qu'ainsi on peut faire en toute sureté $B^\mu = 0$. Quant à la valeur de A^μ, on trouvera aisément qu'elle est donnée par la suite indéfinie

$$A^\mu = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^{0}} + \frac{\frac{1}{2}kk^{0}B}{1+n^{00}} + \text{etc.}$$

Suite très-convergente, et dont on calculera plus ou moins de termes, suivant l'approximation qu'on veut obtenir. Appellons toujours Φ la limite des angles ϕ, $\frac{\phi^{0}}{2}$, $\frac{\phi^{00}}{2}$, etc., ce qui donne, après un nombre de termes suffisant, $\phi^\mu = 2^\mu \Phi$, alors la valeur de H^μ sera $H^\mu = 2^\mu A^\mu \Phi$.

(43). Il est facile maintenant de développer la valeur complète de H que donnent les transformées successives. Soit pour abréger

$$\alpha = \left(A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^{0}} + \frac{\frac{1}{2}kk^{0}B}{1+n^{00}} + \text{etc.}\right)(1+c^{0})(1+c^{00}), \text{etc.}$$

et on aura

$$H = \alpha\Phi - \frac{1+c^{0}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} \int \frac{d\phi^{0} \cos.\phi^{0}}{1+n^{0}\sin.^{2}\phi^{0}}$$
$$- \frac{1+c^{0}}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^{0}} \int \frac{d\phi^{00} \cos.\phi^{00}}{1+n^{00}\sin.^{2}\phi^{00}}$$
$$- \frac{1+c^{0}}{2} \cdot \frac{1+c^{00}}{2} \cdot \frac{1+c^{000}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}kk^{0}B}{1+n^{00}} \int \frac{d\phi^{000} \cos.\phi^{000}}{1+n^{000}\sin.^{2}\phi^{000}}$$
$$- \text{etc.}$$

Les termes qui restent à intégrer dépendent des arcs de cercle, lorsque tous les coëfficiens n^{0}, n^{00}, etc sont positifs,+ et des logarithmes, lorsqu'ils sont tous négatifs. Lorsque $\phi = 90^{0}$ ou un multiple de 90^{0}, ces intégrales disparoissent, et on a simplement $H = \alpha\phi$, donc $H^{1} = \pm\,\alpha \cdot \frac{1}{2}\pi$.

+ Ils sont tous positifs lorsque la valeur primitive de n est positive < c ou négative > c²
Ils sont tous négatifs lorsque n est négatif et < c². Ce qui fait une ligne de démarcation très prononcée.

Si on fait $n = 0$, on aura $k = \frac{c^0}{2}$, $k^0 = \frac{c^{00}}{2}$, etc., et la valeur de H s'accordera avec celle de G de l'art. 30.

Remarquez que la valeur de H se termineroit, ainsi que celle de la limite A^μ, si quelqu'un des nombres k, k^0, k^{00}, etc. étoit zéro, ou si on avoit l'une des égalités $n = -1 + b$, $n^0 = -1 + b^0$, $n^{00} = -1 + b^{00}$, etc. On connoît donc déja une infinité de cas où la fonction H peut se ramener à la première espèce. Ces cas sont ceux où en faisant $n = -c^2 \sin.^2 \theta$, on auroit pour θ l'une des valeurs qui satisfont à l'équation $F(\theta) = \frac{2\nu+1}{2^\mu} F^1$, μ et ν étant des entiers quelconques.

Second moyen de transformation appliqué à la formule H.

(44). Ce nouveau moyen consiste à prendre, comme dans l'art. 39, un nouvel angle ϕ' tel que

$$\sin.\ \phi' = \frac{(1+c)\sin.\ \phi}{1 + c \sin.^2 \phi}.$$

Cet angle ϕ' croîtra continuellement avec l'angle ϕ, et ils coïncideront entièrement lorsque ϕ sera un multiple de 90°. Faisons, conformément aux dénominations accoutumées, $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et $\Delta' = \sqrt{(1 - c'^2 \sin.^2 \phi')}$, nous aurons

$$\sin.^2 \phi = \frac{1-\Delta'}{c(1+\Delta')},\quad \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1}{1+c}\cdot\frac{d\phi'}{\Delta'},$$

valeurs qui étant substituées dans la formule

$$H = \int \left(A + \frac{B \sin.^2 \phi}{1 + n \sin.^2 \phi}\right) \frac{d\phi}{\Delta},$$

donneront

$$H = \frac{1}{1+c} H' - \frac{B}{2n(1+c)} \int \frac{d\phi'}{1 + h' \sin.^2 \phi'},$$

H' représentant $\int \left(A' + \frac{B' \sin.^2 \phi'}{1 + n \sin.^2 \phi'}\right)\frac{d\phi'}{\Delta'}$, et les nouveaux coëfficiens étant

$$A' = A + \frac{B}{2n}, \; B' = \frac{B(n^2 - c^2)}{2n^2(1+c)^2}, \; n' = \frac{(c-n)^2}{n(1+c)^2}.$$

Ainsi nous trouvons que la formule H dépend d'une formule semblable H', dans laquelle c et n sont différens. Il faut examiner s'il y a quelque avantage à cette transformation.

A l'égard de c, le changement paroît désavantageux, parce que c' étant plus grand que c, le radical Δ' diffère plus de l'unité que Δ. Cependant si on continuoit ainsi par des transformations réitérées, la limite des quantités c, c', c'', etc. étant l'unité, on prendroit cos. ϕ pour le dernier radical Δ, et alors l'intégration pourroit s'effectuer par les moyens connus. Mais ce genre d'approximation, dont nous n'avons pas fait mention jusqu'à présent, n'est pas le plus commode, et il vaut beaucoup mieux que les transformées successives tendent à diminuer c. Or il est clair que cette diminution peut s'obtenir en renversant le résultat précédent, ou, ce qui revient au même, en l'écrivant ainsi :

$$H = (1 + c^\circ)\, H^\circ + \frac{B^\circ}{2n^\circ}\int \frac{d\phi}{1 + n \sin^2 \phi},$$

alors on auroit :

$$\sin.\, \phi = \frac{(1 + c^\circ) \sin.\, \phi^\circ}{1 + c^\circ \sin.^2 \phi^\circ}, \; H^\circ = \int \left(A^\circ + \frac{B^\circ \sin.^2 \phi^\circ}{1 + n^\circ \sin^2 \phi^\circ}\right)\frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ},$$

et les nouveaux coëfficiens seroient,

$$n^\circ = \left(\frac{1 + c^\circ}{2}\right)^2 \left(2n + c^2 \pm 2\sqrt{(n^2 + n c^2)}\right),$$

$$B^\circ = \pm B.\, \frac{2n^\circ}{\sqrt{(n^2 + n c^2)}},$$

$$A^\circ = A \mp \frac{B}{\sqrt{(n^2 + n c^2)}}.$$

A cause du double signe $\pm$, on aura à choisir entre deux transformées ; et il paroît convenable de prendre celle où n^0 sera le plus petit. Or, les valeurs de n^0 sont telles que leur produit $= c^{0\,2}$; ainsi, on pourra toujours faire en sorte que dans la transformée, n^0 soit plus petit que c^0, et cela quelque grand que soit n. On peut donc obtenir le même avantage dans les transformées ultérieures ; et ainsi, par cette méthode, on pourra trouver très-promptement une valeur de H aussi approchée qu'on voudra, sans qu'il soit nécessaire d'aucune préparation lorsque n est un peu grand. Cependant cette méthode a quelque désavantage sur la première, en ce que la valeur de n^0 est irrationnelle, et qu'elle deviendroit même imaginaire si n étoit négatif et $< c^2$. Un second désavantage de cette méthode, c'est que φ^0 ne se déduit commodément de φ, qu'en employant un angle auxiliaire ψ, tel que $\sin.\psi = c \sin.\varphi$; alors on a $\sin.\varphi^0 = \frac{1}{\sqrt{c^0}} \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\psi$.

Troisième moyen de transformation, appliqué à la formule H.

(45) La méthode que nous avons suivie dans l'article 20, peut s'appliquer à la formule H ; il faut observer pour cela, que si, d'après l'article 17, on fait,

$$\sin.^2\varphi = \frac{1 - \cos.\psi}{1 + \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\psi)}},$$

on aura $\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\Delta(\psi)}$: substituant ces valeurs dans la formule H de l'art. 40, et faisant, pour abréger $k = \frac{c^2 - n^2}{n^2 + 2n + c^2}$, on trouvera,

$$\mathrm{H} = \int \left\{ \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}(1 + n + nk - nk \sin.^2\psi)}{(n^2 + 2n + c^2)(1 - k^2 + k^2 \sin.^2\psi)} \right\} \cdot \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\Delta(\psi)}$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\mathrm{B}}{n^2 + 2n + c^2} \int \left(\frac{(n + k + kn)\, d\psi \cos.\psi}{(1 - k^2 + k^2 \sin.^2\psi)\, \Delta(\psi)} + \frac{d\psi}{1 + k \cos.\psi} \right).$$

La dernière partie est intégrable par arcs de cercle et par logarithmes. La première est une formule semblable à H, dans laquelle c est le même, et n différent. Cette nouvelle valeur de n étant nommée ν, on auroit

$$\nu = \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{(c^2-n^2)^2}{4n(n+1)(n+c^2)}.$$

Il faudroit renverser le résultat précédent, pour en tirer une approximation semblable à celle qui a été indiquée dans l'article 20; mais comme cette méthode est beaucoup moins avantageuse que les deux précédentes, nous n'y insisterons pas davantage; nous en conclurons seulement que si l'intégrale H est connue lorque $n = \alpha$, elle sera pareillement connue lorsque

$$n = \frac{(c^2-\alpha^2)^2}{(\alpha^2+2\alpha+c^2)^2-(c^2-\alpha^2)^2}.$$

Et par le renversement de cette formule, on trouve que si l'intégrale H est connue dans le cas de $n = \beta$, elle le sera pareillement dans les quatre cas que contient l'expression

$$n = \frac{-\sqrt{\beta} \pm \sqrt{(\beta+c^2)}}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{(\beta+1)}}.$$

C'est ce qu'on trouveroit aussi par la combinaison des deux premières méthodes; car la première méthode donne, entre ϕ et ϕ°, cette relation, $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{1+c^\circ}{2} \cdot \frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ}$, ou $F(c, \phi) = \frac{1+c^\circ}{2} \cdot F(c^\circ, \phi^\circ)$; la seconde, en mettant ψ à la place de ϕ, donneroit $F(c, \psi) = (1+c^\circ)\, F(c^\circ, \phi^\circ)$; donc, par la combinaison des deux, on a $F(c, \phi) = \frac{1}{2} F(c, \psi)$, ou $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\Delta(\psi)}$; ce qui est le fondement de la troisième méthode; et par conséquent toutes les conclusions tirées de cette troisième méthode, sont renfermées implicitement dans les deux autres.

Nous nous proposons maintenant, à l'aide de ces différentes transformations, de faire connoître les cas où la

fonction elliptique H peut se ramener aux fonctions de la seconde espèce, et ne dépend ainsi que des arcs d'ellipse.

Des cas où la fonction H *peut se ramener aux fonctions elliptiques de la seconde espèce.*

(46) Les cas les plus simples où la réduction a lieu immédiatement, sont ceux de $n = -1$, $n = -c^2$, $n = \pm c$. *Voyez* les art. 10 et 39. Si donc, parmi les transformées successives qu'on obtient par l'une des trois méthodes exposées, il en est une qui retombe dans l'un de ces cas, on est assuré que la formule proposée, et toutes les autres transformées, dont le nombre est infini, peuvent se réduire à la seconde espèce, quelquefois même à la première, et ne dépendent ainsi que des arcs d'ellipse : d'où l'on voit qu'il est possible de trouver une infinité de valeurs de n réelles et imaginaires, exprimées en fonctions de c, qui donnent lieu à cet abaissement. C'est ce que nous allons développer.

Par la première méthode. D'une valeur de n correspondante à c, on tire cette valeur de n^o correspondante à c^o :

$$n^o = \frac{n(n+c^2)}{(1+b)^2(1+n)}.$$

Réciproquement d'une valeur de n^o correspondante à c^o, on déduit cette valeur de n correspondante à c :

$$n = \frac{2}{(1+c^o)^2}\left\{n^o - c^o \pm \sqrt{(n^o+1)(n^o+c^{o2})}\right\} :$$

voici l'usage de ces formules :

Si dans la première on fait $n = -1$, ou $n = -c^2$, on n'a aucun résultat ; si on fait $n = \pm c$, on a $n^o = \frac{1-b}{1+b} = c^o$, ou $n = c$, ce qui n'apprend rien de nouveau.

Si dans la seconde, on fait $n^o = -1$, on aura $n = \frac{-2}{1+c^o}$.

Le second membre est une fonction de c°; il faut le rendre fonction de c, et pour cela substituer à la place de c° sa valeur $\frac{1-b}{1+b}$; on aura ainsi $n = -1 - b$, ce qui est un nouveau cas. Mais comme, en vertu de l'article 39, on peut ne considérer que les valeurs de n plus petites que c, et réduire celles qui excéderoient c à la valeur $\frac{c^2}{n}$, dans ce cas, au lieu de la valeur $-1-b$, on peut prendre $\frac{c^2}{-1-b}$, ou $-1+b$. C'est aussi ce qu'on trouveroit immédiatement en faisant, $n^\circ = -c^2$, et il en résulteroit, $n = -1+b$.

alors $\frac{c^2}{n} = -1+b$

Le cas de $n = -1+b$, peut conduire à une infinité d'autres. Faisons, dans la seconde formule, $n^\circ = -1+b^\circ$, nous aurons :

$$n = \frac{-1+b^\circ - c^\circ \pm b^\circ \sqrt{(1-b^\circ)}}{\frac{1}{2}(1+c^\circ)^2}.$$

Il faut changer le second membre en une fonction de c ou b, et pour cela faire $b^\circ = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}$, $c^\circ = \frac{1-b}{1+b}$, ce qui donnera

$$n = \frac{-(1-\sqrt{b})}{1 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{1+b}\right)}}.$$

Ces deux valeurs de n en feroient connoître quatre autres; par une nouvelle substitution, les quatre, huit, et ainsi de suite.

Toutes les valeurs de n ainsi trouvées sont négatives, et plus petites que c^2; elles peuvent donc être représentées par la formule $n = -c^2 \sin.^2 \theta$. Nous avons déja remarqué dans l'article 43 que les valeurs qui rendent nul quelqu'un des termes $n+1-b$, $n^\circ+1-b^\circ$, $n^{\circ\circ}+1-b^{\circ\circ}$, etc., rendent nul aussi quelqu'un de ceux de la suite k, k°, $k^{\circ\circ}$, etc. et ainsi dans tous ces cas la formule générale de l'art. 43 se

se terminera d'elle-même, et la fonction H sera réduite à la première espèce.

Soit encore dans la seconde formule $n^{\circ} = c^{\circ}$, il en résultera $n = \pm c$, ce qui n'apprend rien de nouveau; enfin, soit $n^{\circ} = - c^{\circ}$, et on aura pour nouvelles valeurs $n = - c^2 \pm bc\sqrt{-1}$, d'où il en résultera une infinité d'autres par des substitutions réitérées.

En général on voit que chaque valeur de n négative, et plus grande que c^2, en donnera deux imaginaires; chaque valeur positive en donnera deux réelles, l'une positive et l'autre négative. Mais nous ne connoissons encore dans les valeurs positives que le cas de $n = c$, qui n'en fait pas connoître d'autres : les autres méthodes vont en offrir de nouveaux.

(47). *Par la seconde méthode.* D'une valeur de n correspondante à c, on tire cette valeur de n° correspondante à c°

$$n^{\circ} = \left(\frac{\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n}}{1+b}\right)^2.$$

Réciproquement d'une valeur de n° correspondante à c°, on tire cette valeur de n correspondante à c :

$$n = \frac{(c^{\circ} - n^{\circ})^2}{n^{\circ}(1+c^{\circ})^2}.$$

Soit dans la première formule $n = c$, et on aura $n^{\circ} = c\left(\frac{\sqrt{(1+c)}-1}{1+b}\right)^2$; mais il faut changer le second membre en fonction de c°, et pour cela faire $c = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{1+c^{\circ}}$, $b = \frac{1-c^{\circ}}{1+c^{\circ}}$. La substitution faite, on ôtera par-tout l'indice o, et on aura

$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}.\{1 + \sqrt{c} - \sqrt{(1+c)}\}^2.$$

Si on eût fait $n = -c$, on auroit trouvé cette valeur de n

$$n = -\tfrac{1}{2}\sqrt{c}.\{1 - \sqrt{c} - \sqrt{(1+c)}\}^2.$$

Ces deux nouvelles valeurs sont moindres que c, et chacune

des deux en peut fournir une infinité d'autres, tant par la formule de cette seconde méthode que par celle de la première.

(48). *Par la troisième méthode.* c restant le même, si ν est une valeur de n, on en connoîtra une autre par la formule,

$$n = \frac{(c^2 - \nu^2)^2}{4(\nu + 1)(\nu + c^2)},$$

et aussi une autre, par l'inverse de cette formule, qui donne,

$$n = \frac{\pm\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{\nu}\right)} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)} + 1}.$$

Dans celle-ci on peut mettre $\frac{c^2}{\nu}$ à la place de ν, ce qui donnera pour troisième formule,

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1 + \nu)} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\nu}{c^2}\right)} + 1}.$$

Cette troisième méthode est, comme nous l'avons déja remarqué, une suite des deux autres; mais elle est plus commode pour l'objet actuel, parce que la valeur de n est exprimée immédiatement en fonction de c, et qu'il n'y a point de réduction à faire d'une fonction de c^0 à une fonction de c.

La première formule ne donnant rien dans les cas les plus simples, passons à la seconde, et faisons $\nu = -1$, il en résultera $n = \pm b - 1$, ce qui est une valeur déja connue. Faisons ensuite $\nu = b - 1$ dans la troisième formule, nous aurons

$$n = \frac{\pm\sqrt{b} - 1}{\sqrt{\left(\frac{b}{b-1}\right)} + 1},$$

valeur qui a été déja trouvée par la première méthode, mais moins immédiatement. On pourroit y changer le signe de b, ce qui donneroit deux nouvelles valeurs imaginaires.

Soit $\nu = -c^2$ dans la seconde formule, ou $\nu = -1$ dans la troisième, nous aurons $n = -c^2 \pm bc\sqrt{-1}$, ce qui est un résultat déja connu.

Enfin faisons $\nu = c$ dans la seconde ou la troisième formule, et nous aurons

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1+c)}-1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{c}\right)}+1},$$

valeur qui revient encore à celles que nous avons trouvées par la seconde méthode. Si on eût fait $\nu = -c$, on auroit trouvé ces valeurs imaginaires,

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1-c)}-1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{c}\right)}+1}.$$

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails, et on voit que par la combinaison de ces formules, on obtiendra une multitude infinie de valeurs de n exprimées en fonctions de c réelles ou imaginaires, au moyen desquelles la formule H pourra être débarassée du dénominateur $1 + n\sin.^2\phi$, par une ou plusieurs transformations convenables, et qui peuvent s'effectuer par les méthodes précédentes. Ainsi cette fonction elliptique de la troisième espèce peut se réduire, dans une infinité de cas, à une fonction de la seconde espèce, et ne dépend alors que des arcs d'ellipse.

D'une autre manière d'évaluer les fonctions elliptiques.

(49). Il peut être nécessaire dans plusieurs cas, sur-tout dans les problêmes de mécanique, d'exprimer par la seule variable ϕ les fonctions elliptiques dont ces problêmes dé-

pendent. Alors le développement se fera de la manière connue; mais les méthodes précédentes serviront toujours à simplifier la détermination des coëfficiens.

Considérons d'abord la fonction $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, et supposons $\frac{1}{\Delta} = A - 2B\cos. 2\varphi + 4C\cos. 4\varphi - \text{etc.}$, afin qu'il en résulte

$$F = A\varphi - B\sin. 2\varphi + C\sin. 4\varphi - D\sin. 6\varphi + \text{etc.}$$

Il s'agit d'avoir le plus simplement qu'il est possible, les valeurs des coëfficiens A, B, C: etc. Or, par un premier développement, on a $\frac{1}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2} c^2 \sin.^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} c^4 \sin.^4 \varphi$ + etc.; ensuite mettant au lieu des puissances des sinus leurs valeurs en cosinus linéaires, on trouve une suite de la forme supposée, dont les coëfficiens sont:

$$A = 1 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1.\ 9}{4.\ 16}c^4 + \frac{1.\ 9.\ 25}{4.\ 16.\ 36}c^6 + \frac{1.\ 9.\ 25.\ 49}{4.\ 16.\ 36.\ 64}c^8 + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{2}S + \frac{2}{3}S + \frac{3}{4}S + \frac{4}{5}S + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{8}S + \frac{2}{10}S + \frac{3}{12}S + \text{etc.}$$

$$D = \frac{2}{18}S + \frac{4}{21}S + \text{etc.}$$

etc. etc.

Dans chaque valeur on a désigné par S le terme supérieur de la valeur précédente, et par ce moyen la loi de ces suites est assez facile à saisir. Les multiplicateurs à employer pour passer d'une ligne à l'autre, sont en général $\frac{n}{(n+1)(2n+2)}$, $\frac{2n}{(n+1)(2n+3)}$, $\frac{3n}{(n+1)(2n+4)}$, etc.; cette loi ne serviroit pas à déduire B de A, mais elle servira à déduire C de B, en faisant $n = 1$, D de C, en faisant $n = 2$, etc. On pourra donc par ces suites calculer effectivement les valeurs de A,

B, C, etc. ; mais lorsque c diffère peu de l'unité, il faudroit calculer beaucoup de termes pour avoir une approximation médiocre.

(50). La valeur de $\frac{1}{\Delta}$ étant multipliée successivement par $d\phi$, $d\phi$ cos. 2ϕ, $d\phi$ cos. 4ϕ, etc. , puis intégrée depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90°$, donnera,

$$A.\frac{\pi}{2} = \int \frac{d\phi}{\Delta},\ B\frac{\pi}{2} = \int -\frac{d\phi \cos. 2\phi}{\Delta},\ 2\,C.\frac{\pi}{2} = \int \frac{d\phi \cos. 4\phi}{\Delta}, \text{etc.}$$

Ainsi chacun des coëfficiens A, B, C, etc. se trouve par une intégrale définie, et ces intégrales ne dépendent que des quantités F 1, E 1. On a d'abord pour les deux premiers $A\frac{\pi}{2} = F\,1$, et $B\frac{\pi}{2} = \frac{2}{c^2}(F\,1 - E\,1) - F\,1$, et en substituant les valeurs de F 1 et E 1 (art. 27 et 31), il en résulte

$$\begin{aligned} &A = (1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ})(1 + c^{\circ\circ\circ}), \text{ etc.} \\ &\frac{B}{A} = \frac{c^{\circ}}{2} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}}{4} + \frac{c^{\circ}c^{\circ\circ}c^{\circ\circ\circ}}{8} + , \text{ etc.} \end{aligned} \quad \ldots (\alpha).$$

Ces deux premiers coëfficiens étant trouvés, on peut en déduire tous les autres; car en comparant la différentielle de $\frac{1}{\Delta}$ avec celle de sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} &2.3\,C = 4B\left(\frac{2 - c^2}{c^2}\right) - A \\ &3.5\,D = 16C\left(\frac{2 - c^2}{c^2}\right) - 1.3\,B \quad \ldots\ (6) \\ &4.7\,E = 36D\left(\frac{2 - c^2}{c^2}\right) - 2.5\,C \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Cependant ces équations ne seroient pas d'un usage bien sûr si c étoit très-petit; car il faudroit supposer A et B calculés avec une extrême précision, pour que les erreurs ne devinssent pas bientôt fort considérables sur les autres coëfficiens. Dans ce cas, on pourroit employer les suites de l'article précédent; mais il vaut encore mieux se servir des mêmes

équations (6) dans un ordre inverse. Par exemple, si l'approximation dont on a besoin n'exige pas qu'on aille au-delà du terme D, on pourra négliger E dans la troisième des équations (6), et il en résultera le rapport de D à C. La seconde fera connoître celui de C à B, et la première donnera celui de B à A, ce qui pourra servir de vérification. On voit dès-lors que tous les coëfficiens seront connus, jusqu'à celui qu'on se permet de négliger. Au reste, le coëfficient A est celui qu'il faudra toujours déterminer avec le plus de précision ; car $A\varphi$ est la partie principale de F, celle qui augmente indéfiniment ; les autres ne sont que des inégalités ou *équations* de cette valeur moyenne.

(51). Les fonctions elliptiques de la seconde espèce, pouvant être représentées par la formule $G = \int (\alpha + \beta \cos. 2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$, il est aisé de voir qu'on a

$$G = \alpha\,[A\varphi - B \sin 2\varphi + C \sin. 4\varphi - D \sin. 6\varphi + \text{etc.}]$$
$$- \beta \left[B\varphi - \left(\frac{A+2C}{2}\right) \sin. 2\varphi + \frac{B+3D}{4} \sin. 4\varphi - \left(\frac{2C+4E}{6}\right) \sin. 6\varphi + \text{etc.}\right];$$

ainsi ce développement ne présente aucune difficulté nouvelle, et s'exécute par les mêmes coëfficiens.

A l'égard des fonctions de la troisième espèce, il suffira de considérer la formule $H = \int \frac{1}{1 + n \sin.^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$: or, si on suppose

$$H = M\varphi - N \sin. 2\varphi + P \sin. 4\varphi - Q \sin. 6\varphi + \text{etc.}$$

et qu'on différencie chaque membre, il en résultera une valeur de $\frac{1}{\Delta}$, qui, étant comparée à celle de l'article 49, donnera,

$$N = - M + \tfrac{2}{n}(A - M),$$

$$2P = -2N - M + \tfrac{4}{n}(B - N),$$

$3Q = -4P - N + \frac{8}{n}(C - P),$

$4R = -6Q - 2P + \frac{12}{n}(D - Q),$

etc.

D'où il suit qu'en supposant toujours A, B, C, etc. connus, il suffit de déterminer le premier coëfficient M, pour en conclure tous les autres. Or, on a, par l'art 43,

$$\frac{M}{A} = 1 - \frac{1}{2} n \left[\frac{1}{1+n} + \frac{k}{1+n^{0}} + \frac{k k^{0}}{1+n^{00}} + \text{etc.}\right]:$$

On pourroit aussi déduire M de A, B, C, etc., car on connoît la formule $\frac{\sqrt{(1+n)}}{1+n \sin.^2 \phi} = 1 + 2 \alpha \cos. 2\phi + 2\alpha^2 \cos. 4\phi + \text{etc.},$ dans laquelle $\alpha = \frac{\sqrt{(1+n)}-1}{\sqrt{(1+n)}+1}$: multipliant cette formule par $\frac{d\phi}{\Delta}$, et intégrant depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90°$, on aura,

$$M\sqrt{(1+n)} = A - 2B\alpha + 4C\alpha^2 - 6D\alpha^3 + \text{etc.}$$

(52). Il ne resteroit, pour faciliter ces déterminations, qu'à construire une table des valeurs de A et B, ou de leurs logarithmes, pour différentes valeurs du module c; ce qu'on pourroit faire aisément par les formules (α). Il conviendroit de représenter chaque module par le sinus d'un angle, et alors le complément du module répondroit au complément de l'angle. Soient A et B les nombres du module sin. θ, A′ et B′ ceux de son complément cos. θ, alors, suivant le théorême de l'art. 37, on aura cette relation, qui pourra servir de vérification continuelle $\frac{4}{\pi A A'} = 1 - \frac{B}{A} \sin.^2 \theta - \frac{B'}{A'} \cos.^2 \theta$. Voici un léger essai de cette table, qu'il faudroit étendre davantage, mais qui ne laissera pas d'être utile dans plusieurs occasions, et qui d'ailleurs a été vérifiée avec soin.

Angle du Module.	Log. de A.	Log. de B.	Angle du Module.	Log. de A.	Log. de B.
o d.	Zéro.	Inf. nég.	90 d.	Inf. pos.	Inf. pos.
1	0,0000331	5,5807199	89	0,5390725	0,3399469
2	0,0001323	6,1829453	88	0,4799075	0,2426870
3	0,0002978	6,5354036	87	0,4412352	0,1742911
6	0,0011920	7,1389540	84	0,3663934	0,0280475
9	0,0026860	7,4936265	81	0,3164715	9,9175495
12	0,0047846	7,7470016	78	0,2778878	9,8229717
15	0,0074955	7,9453400	75	0,2460561	9,7374505
18	0,0108284	8,1092576	72	0,2188233	9,6576703
21	0,0147959	8,2497638	69	0,1949916	9,5817130
24	0,0194130	8,3734429	66	0,1738201	9,5083232
27	0,0246981	8;4845561	63	0,1548157	9,4365965
30	0,0306733	8,5860288	60	0,1376327	9,3658278
33	0,0373648	8,6799638	57	0,1220183	9,2954244
36	0,0448034	8,7679334	54	0,1077813	9,2248545
39	0,0530260	8,8511530	51	0,0947747	9,1536124
42	0,0620766	8,9305914	48	0,0828812	9,0811882
45	0,0720074	9,0070451	45	0,0720074	9,0070451

Pour faciliter la construction de cette table, il est bon de remarquer qu'ayant exactement $A = \frac{2\sqrt{c^\circ}}{c} A^\circ$, on a à-très-peu-près $\frac{B}{A} = \frac{c^\circ}{2}\sqrt{A^\circ}$, et cette valeur ne pèche, en excès, que de la petite partie $\frac{1}{16} c^{\circ\circ 3}$. D'où il suit que l'erreur ne sera pas d'une unité décimale du 7[e] ordre, tant que c sera au-dessous de sin. 52° 40′, et avec la correction on peut supposer c sensiblement plus grand. Or, comme la valeur de A se calcule par des facteurs successifs dont $\frac{2\sqrt{c^\circ}}{c}$ est le premier, on connoîtra immédiatement, par le calcul de A, la valeur de log. A°, et ainsi on aura B d'une manière très-prompte. On peut aussi profiter de la même propriété au-delà de la limite fixée; car on a également $A = \frac{2\sqrt{c^\circ}}{c} . \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^\circ} A^{\circ\bullet}$, et de là il s'ensuit, avec encore plus d'approximation, $\frac{B}{A} = \frac{c^\circ}{2}(1 + \frac{c^{\circ\circ}}{2}\sqrt{A^{\circ\circ}})$, valeur qui ne tromperoit que de deux unités du 8[e] ordre, si on avoit $c = \sin. 84°$. Or, il n'est pas

pas nécessaire d'aller plus loin, ni même aussi loin, parce que quand c est si près de l'unité, il y a d'autres formules plus convergentes, dont il est à propos de se servir pour calculer A et B.

Un des premiers usages de ces nombres consiste à déterminer les fonctions F 1 et E 1 par les formules $F1 = \frac{\pi}{2} A$, $E1 = \frac{\pi}{2} A - \frac{\pi}{4} c^2 (A + B)$. Ainsi dans le cas où c n'est pas trop près de l'unité, on a à la fois $F1 = \frac{\pi}{2}(1 + c^{\circ}) A^{\circ}$, et $E1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A^{\circ}}{1 + c^{\circ}} (1 + c^{\circ 2} - c^{\circ 2} \sqrt{} A^{\circ})$. Mais pour cet objet il est aussi court de se servir de la formule exacte

$$E1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A^{\circ}}{1 + c^{\circ}} \left[1 - \frac{c^{\circ 2} c^{\circ\circ}}{2} - \frac{c^{\circ 2} c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ}}{4} - \text{etc.} \right]$$

qui est la même que celle de l'art. 31 ; mais sous une autre forme. Cette formule cependant ne seroit pas d'un usage commode, si c étoit trop près de l'unité. Dans ce cas b sera très-petit, et il faudra se servir de la formule $E1 = 1 + \frac{1}{2} b^2 (\log. \frac{4}{b} - \frac{1}{2}) + \frac{3}{16} b^4 (\log. \frac{4}{b} - \frac{13}{12}) + \text{etc.}$, formule que nous avons démontrée ailleurs, et qui meneroit très-promptement au résultat. Il est donc à propos d'avoir des formules semblables pour calculer A et B dans le cas de b très-petit ; ces formules pourroient se déduire de la valeur de E 1, et des autres relations connues ; mais voici un moyen direct d'y parvenir.

(53). On peut déduire des valeurs de A et B développées dans l'art. 49, ces deux équations $B = A - 2(\frac{1 - c^2}{c}) \frac{dA}{dc}$, $c(1 - c^2) \frac{dA}{dc} = \int A c dc$. La première fait voir comment B se déduit de A ; l'autre étant différentiée donne,

$$(1 - c^2) \frac{ddA}{dc^2} + \frac{1 - 3c^2}{c} \cdot \frac{dA}{dc} - A = 0 \ldots \quad (\gamma)$$

L

Comme nous voulons développer A suivant les puissances de b, il faut substituer dans cette équation $\sqrt{(1-b^2)}$ au lieu de c, et elle deviendra,

$$(1-b^2)\frac{ddA}{db^2}+\frac{1-3b^2}{b}\frac{dA}{db}-A=0\ .\ .\ .\ .\ (\delta).$$

Il arrive donc, ce qui est fort remarquable, que l'équation est absolument de la même forme par rapport à b ou par à c; d'où nous concluerons qu'on satisfait à l'équation (δ), en mettant au lieu de A la valeur $A' = 1 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1.\ 9}{4.\ 16}b^4 +$ etc. Cette valeur A′ n'est pas celle que nous cherchons (puisqu'elle répond au complément du module), mais elle y conduira. Soit $A = A'p$, la substitution dans l'équation (δ) donnera, après les réductions ordinaires, $p = \alpha\int\frac{db}{b(1-b^2)A'^2}$. Développant cette valeur en série, et déterminant la constante α par la valeur connue de E 1, on aura

$$\frac{\pi}{2}A = A'\left[\log.\frac{4}{b}-\frac{1}{4}b^2-\frac{13}{128}b^4-\frac{23}{384}b^6-\text{etc.}\right].\ .\ .(\varepsilon)$$

Formule très-convergente lorsque b est très-petit, et qu'il conviendra d'employer lorsque c sera au-dessus de sin. 80°, ou b au-dessous de sin. 10°. Dans la construction d'une table, on a cet avantage, que A′ est déja calculé pour un petit angle, lorsqu'on calcule A pour son complément. Il n'est pas nécessaire, pour l'objet de ces approximations, de continuer plus loin la suite (ε), cependant la forme de l'expression étant connue, on trouveroit facilement, d'après l'équation (γ), cette loi :

$$\frac{\pi}{2}A = \log.\frac{4}{b}+\frac{1}{4}b^2\left(\log.\frac{4}{b}-1\right)+\frac{1.\ 9}{4.\ 16}b^4\left(\log.\frac{4}{b}-1-\frac{1}{2.3}\right)$$
$$+\frac{1.\ 9.\ 25}{4.\ 16.\ 36}b^6\left(\log.\frac{4}{b}-1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.5}\right)+\text{etc.}\ .\ .\ .\ (\zeta)$$

$\varphi = x + \frac{x^3}{1\cdot3} + \frac{x^5}{3\cdot5} +$ etc

$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{x^2}l(1-x^2)$ $\varphi = (\frac{1}{x}-1)\,l(1-x^2) + 2l(1+x)$ –

$x=1$ $\varphi = 2l2$ —

où il faut observer que les fractions $\frac{1}{2.3}$, $\frac{1}{3.5}$, seront suivies de $\frac{1}{4.7}$, $\frac{1}{5.9}$, etc. Connoissant A on aura B, soit par la formule

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{B} = \left(\mathrm{A}' + 2b\frac{d\,\mathrm{A}'}{d\,b}\right)\left(\log.\frac{4}{b} - \frac{1}{4}b^2 - \frac{13}{128}b^4 - \text{etc.}\right) - \frac{2}{(1-b^2)\mathrm{A}'} \quad \ldots (\eta)$$

(dans laquelle, à la place de $\mathrm{A}' + 2b\frac{d\,\mathrm{A}'}{d\,b}$, on peut mettre $\frac{\mathrm{A}' - \mathrm{B}'b^2}{1-b^2}$, ou sa valeur développée $1 + \frac{1}{4}.5\,b^2 + \frac{1.\;9}{4.\;16}9b^4$ etc.), soit par la suite

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{B} = -2\mathrm{A}' + \log.\frac{4}{b} + \frac{1}{4}.5\,b^2\left(\log.\frac{4}{b} - 1\right) + \frac{1.\;9}{4.\;16}9\,b^4\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{1}{2.3}\right) + \text{etc.}$$

Les autres coëfficiens C, D, etc. se calculeront par les équations (6), dont l'usage est sûr et commode dans le cas dont il s'agit. On voit au reste que la combinaison des équations (η) et (ε), meneroit directement à l'équation $\frac{4}{\pi\mathrm{A}\mathrm{A}'} = 1 - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}c^2 - \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'}b^2$, qui est le théorème de l'art. 37.

Enfin, pour parvenir à une relation d'un autre genre, si on considère la suite des fonctions F 1, qui répondent à la suite des modules . . . . . c'', c', c, c°, $c^{\circ\circ}$, ... dont le moyen $c = \sin. 45^{\circ}$, on verra aisément que les fonctions F′ et F° ont des modules complémens l'un de l'autre, ainsi que F″ et F°°, etc. On aura de plus $\mathrm{F}' = 2\mathrm{F}^{\circ}$, $\mathrm{F}'' = 4\mathrm{F}^{\circ\circ}$, etc. De là et des formules précédentes, il suit que π est égal à la limite des quantités $\log.\frac{4}{c^{\circ}}$, $\frac{1}{2}\log.\frac{4}{c^{\circ\circ}}$, $\frac{1}{4}\log.\frac{4}{c^{\circ\circ\circ}}$, etc., et dès le 6e terme cette approximation équivaut à cent décimales au moins.

De la surface du cône oblique.

(54). Soit le rayon de la base $= 1$, la hauteur du cône $= f$, la distance entre le centre de la base et le pied de la perpen-

diculaire $= g$, l'angle au centre entre la ligne g, et un rayon quelconque $= \omega$, la partie de la surface du cône qui répond à l'angle ω sera,

$$C = \int \tfrac{1}{2} d\omega \sqrt{[f^2 + (1 - g \cos. \omega)^2]}.$$

Pour réduire cette intégrale à la forme ordinaire, faisons, $\cos. \omega = \frac{m + \cos. \phi}{1 + m \cos. \phi}$, ou $\tang. \frac{1}{2}\omega = \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)} \tang. \frac{1}{2}\phi$, et prenons l'indéterminée m, de manière que $f^2 m + (1 - mg)(m - g) = 0$, ce qui donne

$$m = \frac{1 + f^2 + g^2}{2g} - \sqrt{\left[\left(\frac{1 + f^2 + g^2}{2g}\right)^2 - 1\right]},$$

faisons de plus, $c^2 = \frac{(g-m)^2}{f^2 + (g-m)^2}$, nous aurons la transformée,

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - m^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{g}{m}\right)} \int \frac{d\phi \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}}{(1 + m \cos. \phi)^2},$$

formule où m est plus petite que l'unité, comme il est nécessaire pour que ϕ soit réel, et où on peut remarquer que $\sqrt{\left(\frac{g}{m}\right)}$ est la moyenne arihmétique entre la plus grande et la plus petite distance du sommet à la circonférence de la base.

Si on fait maintenant pour abréger, $C = \frac{1}{2}(1 - m^2)^{\frac{3}{2}} Z \sqrt{\frac{g}{m}}$, on aura

$$Z = \frac{-m \Delta \sin. \phi}{1 + m \cos. \phi} - \int \frac{m \, d\phi \cos. \phi}{(1 - m^2 \cos.^2 \phi)\Delta} + \int \frac{d\phi}{(1 - m^2 \cos.^2 \phi)\Delta} - \int \frac{c^2 \sin.^2 \phi \, d\phi}{\Delta}.$$

De ces trois intégrales, la première se réduit à un arc de cercle ; car, soit $\tang \xi = \frac{c \sin. \phi}{\Delta \sqrt{\left(1 - \frac{m}{g}\right)}}$, l'intégrale sera $\frac{\xi}{\sqrt{(1 - m^2)} . \sqrt{\frac{g}{m}}}$. Si on fait ensuite, $\frac{m^2}{1 - m^2} = n$, quantité

positive, les deux autres intégrales pourront se mettre sous la forme,

$$\int \frac{n - n \sin.^2 \varphi}{1 + n \sin.^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \Delta \, d\varphi.$$

Soit donc comme à l'ordinaire, $E = \int \Delta \, d\varphi$, $H = \int \frac{n - n \sin.^2 \varphi}{1 + n \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$, et on aura,

$$Z = \frac{-m \Delta \sin. \varphi}{1 + m \cos. \varphi} - \frac{\xi \sqrt{m}}{\sqrt{(1 - m^2)} \cdot \sqrt{g}} + E + H.$$

Dans le cas du cône entier, on aura simplement $Z = 4 E^1 + 4 H^1$.

La quantité H est une fonction elliptique de la troisième espèce, qui ne peut se ramener en général aux fonctions de la seconde ; ainsi la surface du cône oblique est une transcendante supérieure aux arcs d'ellipse ; mais elle est comprise dans les transcendantes elliptiques, et elle jouit par conséquent de leurs propriétés, c'est-à-dire, qu'on peut comparer une infinité de portions de cette surface, de manière que leurs différences combinées soient déterminables par des arcs de cercle ; car à cause de n positif, les logarithmes n'entrent pas dans ces comparaisons.

On peut assigner une infinité de cônes obliques dont la surface soit déterminable par arcs d'ellipse : il faut pour cela que n soit égal à l'une des fonctions de c, au moyen desquelles nous avons trouvé que la fonction H peut s'abaisser à un degré inférieur. La valeur de n devant être positive, le cas le plus simple est celui de $n = c$, qui donneroit $g = \sqrt{(c + c^2)}$, $f = \sqrt{(c - c^2)}$; de sorte que si on a entre les lignes, f, g, et le rayon de la base 1 ou r, l'équation

$$(f^2 + g^2)^2 = 2 r^2 (g^2 - f^2),$$

la surface partielle ou totale du cône pourra se déterminer

par les arcs d'ellipse ; on trouve par exemple que la surface totale $= \frac{\pi}{2} + 2\,E\,1 - (1 - c)\,F\,1$.

Le développement de la surface du cône oblique sur un plan, produit un secteur dont l'angle se détermine par la formule

$$\Sigma = \int \frac{d\omega \sqrt{[f^2 + (1 - g\cos.\ \omega)^2]}}{1 + f^2 + g^2 - 2g\cos.\ \omega},$$

ou par sa transformée

$$\Sigma = \sqrt{\left(\frac{g}{m}\right)}.(1 - m^2)^{\frac{1}{2}} \int \frac{\Delta\, d\phi}{1 + n\sin.^2 \phi}.$$

Cette quantité dépend donc toujours des mêmes transcendantes ; mais elle est un peu plus simple, parce qu'elle ne renferme qu'un seul terme qui se rapporte aux fonctions elliptiques de la troisième espèce. Dans le cas particulier dont nous avons fait mention, l'angle total du secteur seroit $\pi + 2(1 - c)\,F\,1$.

De quelques formules générales qui peuvent se ramener aux fonctions elliptiques.

(54). La nature des transcendantes elliptiques étant connue et approfondie, il importe de ramener à ces quantités le plus grand nombre de formules intégrales qu'il sera possible. Comme la multitude en est infinie et aussi variée que les substitutions qu'on peut mettre en usage, nous nous contenterons d'indiquer quelques cas où cette réduction a lieu.

1°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques l'intégrale* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6)}}$, *dans laquelle* P *est une fonction rationnelle de* x.

Car si on fait $x^2 = z$, on pourra supposer $P = M + N\sqrt{z}$,

M et N étant des fonctions rationnelles de z, et l'intégrale proposée deviendra,

$$\int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}\,dz}{\sqrt{(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4)}} + \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{N}\,dz}{\sqrt{(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3)}},$$

dont les deux parties sont comprises dans les formules elliptiques.

2°. *Toute formule* $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}}$ *dans laquelle* P *est une fonction rationnelle de* x, *peut se ramener aux fonctions elliptiques.*

Car on peut toujours faire $\mathrm{P} = \mathrm{M} + \mathrm{N}x$, M et N étant des fonctions rationelles paires de x. Considérons la partie

$$\frac{\mathrm{N}\,x\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}},$$

et faisons $\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)} = z$, ce qui donne

$$x^2 = \frac{-\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4)}}{2\gamma},$$

il est clair que par la substitution de la valeur de x^2, $\mathrm{N}x\,dx$ ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4)}$; donc toute la difficulté se réduira à intégrer une quantité de la forme

$$\frac{\mathrm{Q}\,z^2\,dz}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^4)}},$$

dans laquelle Q est une fonction rationelle de z^4. Quant à la partie

$$\frac{\mathrm{M}\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)}};$$

si on fait $\sqrt[4]{(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)} = xy$, on aura

$$x^2 = \frac{-\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4)}}{2(\gamma - y^4)},$$

$$\frac{dx}{xy} = \frac{-2x^2y^2\,dy}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4)}},$$

d'où l'on voit que la transformée en y contiendra encore une partie entièrement rationelle, et une de la forme

$$\frac{R y^3 dy}{\sqrt{(6^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y^4)}},$$

R étant une fonction rationelle de y^4. Donc la formule proposée est toujours réductible aux fonctions elliptiques.

3°. *On resoudroit absolument de la même manière la formule* $\int P\,dx \sqrt[4]{(\alpha + 6x^2 + \gamma x^4)}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Ces deux cas comprennent la formule $\int P\,dx(\alpha + 6x^2 + \gamma x^4)^{\pm\frac{3}{4}}$, et aussi la formule $\int Q\,dy(\alpha + 6y + \gamma y^2)^{\pm\frac{1}{4}}$, où Q est une fonction rationelle de y; car en faisant $y = x^2$, cette dernière retombe dans les deux autres.

4°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule* $\int P\,dx(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Cette réduction peut se faire de plusieurs manières; d'abord on peut faire l'une ou l'autre des suppositions

$$\sqrt[3]{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3)} = \sqrt[3]{\alpha} + xz,$$
$$\sqrt[3]{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3)} = x\sqrt[3]{\delta} + z,$$

et les transformées en z seront comprises dans les fonctions elliptiques. On peut aussi faire disparoître à volonté le coëfficient α ou le coëfficient δ sous le radical; il faut faire pour cela $x = m + y$, ou $x = m + \frac{1}{y}$, et prendre pour m une racine réelle de l'équation $\alpha + 6m + \gamma m^2 + \delta m^3 = 0$. Supposons qu'on a fait disparoître de cette manière δ, alors on fera $\sqrt[3]{(\alpha + 6x + \gamma x^2)} = z$, ce qui donne

$$x = \frac{-6 + \sqrt{(6^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3)}}{2\gamma},$$

et en substituant cette valeur dans la formule proposée, toute

toute la difficulté se réduira à intégrer une différentielle de de la forme $\frac{Q\,dz}{\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\gamma z^3)}}$, Q étant une fonction rationelle de z.

5°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{[\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6]}}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Car si on fait $x^2 + 1 = xz$, cette formule deviendra d'abord

$$\int \frac{P x^{-\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{[\alpha(z^3 - 3z) + \beta(z^2 - 2) + \gamma z + \delta]}},$$

ensuite la valeur de x, qui est $\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(z^2 - 4)}$, étant substituée dans P, il est clair que le résultat sera de la forme $M \pm N\sqrt{(z^2 - 4)}$, M et N étant des fonctions rationelles de z. De plus, on a $x + 1 = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z + 2)}$, $x - 1 = \pm x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z - 2)}$; de là résulte $2x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(z + 2)} \mp \sqrt{(z - 2)}$, et

$$x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z + 2)}} \mp \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z - 2)}},$$

donc la transformée en z aura tous ses termes intégrables par les fonctions elliptiques.

6°. *Enfin on peut intégrer de même la formule* $\int \frac{P\,dy}{\sqrt{(\beta + \gamma y^2 + \delta y^4 + \gamma y^6 + \beta y^8)}}$, P *étant une fonction rationelle de* y.

Car si on fait $P = M + Ny$, M et N étant des fonctions paires de y, et qu'on appelle le radical R, la partie $\frac{M\,dy}{R}$ rentrera dans le cas précédent, en faisant $\alpha = 0$ et $y^2 = x$. L'autre partie $\frac{Ny\,dy}{R}$ se réduit pareillement à une fonction elliptique, en faisant $y^2 = x$.

EXEMPLE.

(56.) Soit proposé d'intégrer la différentielle

$$d\,\Pi = \frac{dx}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}}.$$

On fera $\sqrt[3]{(1-3xx)} = 1 - \frac{x}{z}$, ce qui donne $x = \frac{3z}{2}(1+zz) - \frac{3z}{2}\sqrt{(z^4+2z^2-\frac{1}{3})}$, et la transformée sera

$$d\,\Pi = \frac{\frac{1}{2}(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)(3z^2-1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3z^4+1}{3z^4+2z^2-1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(3z^4+6z^2-1)}}.$$

La première partie est rationelle ; la seconde semble devoir se décomposer en deux fonctions elliptiques de la troisième espèce, à cause des deux facteurs du dénominateur $3z^4+2z^2-1$. Mais en examinant la chose avec plus d'attention, on trouve qu'en faisant $\sqrt{(3z^4+6z^2-1)} = pz$, la seconde partie de la valeur de $d\,\Pi$ devient $-\frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{dp}{p^2-4}$. Ainsi la différentielle proposée peut être intégrée absolument sans fonctions elliptiques, et elle se réduit à l'expression rationelle,

$$d\,\Pi = \frac{\frac{1}{2}(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)(3z^2-1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{dp}{p^2-4}.$$

Une pareille simplification aura lieu en général pour la formule

$$\int \frac{(\gamma z^4 - \alpha)\,dz}{(\gamma z^4 + \iota z^2 + \alpha)\sqrt{(\alpha + 6z^2 + \gamma z^4)}};$$

car si on fait le radical $= pz$, cette formule deviendra $\int \frac{dp}{p^2 - 6 + \iota}$; réduction assez remarquable et analogue à celle des articles 38 et 39.

Des transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, *qu'on suppose intégrée depuis* x = o *jusqu'à* x = 1.

(57). Euler a considéré ces transcendantes dans le chap. IX, tome I de son *Calcul intégral*, et il en a démontré un grand nombre de belles propriétés. Désignons avec cet auteur la formule dont il s'agit par le caractère $\left[\frac{p}{q}\right]$, ce qui est commode pour comparer diverses formules de ce genre, dans lesquelles n est le même; nous aurons d'abord $\left[\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{q}{p}\right]$, première propriété, qui fait voir que les nombres p et q peuvent s'échanger l'un dans l'autre. On a ensuite $\left[\frac{p+n}{q}\right] = \frac{p}{p+q} \cdot \left[\frac{p}{q}\right]$, d'où il suit que les formules $\left[\frac{p}{q}\right]$ peuvent toujours se réduire à des formules de la même nature, dans lesquelles p et q ne surpassent pas n; ainsi on pourra toujours supposer que p et q ne surpassent pas n. Dans le cas de $q = n$, on a exactement $\left[\frac{n}{q}\right] = \frac{1}{q}$, et dans le cas de $p + q = n$, l'intégrale $\left[\frac{p}{q}\right]$ ne dépend que du cercle, et on a généralement

Equation (1), (2), (3)

$$\left[\frac{n-a}{a}\right] = \left[\frac{a}{n-a}\right] = \frac{\pi}{n \sin. \frac{a\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Ces deux cas sont les seuls où l'on puisse déterminer exactement la fonction $\left[\frac{p}{q}\right]$; tous les autres offrent autant de transcendantes supérieures aux arcs de cercle, et il s'agit de réduire ces transcendantes, pour chaque valeur de n, au moindre nombre possible. On a pour cet effet l'équation générale $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{r}\right] = \left[\frac{p}{r}\right]\left[\frac{p+r}{q}\right]$, qui a lieu quels que (5)

+ Voir surtout le tome XVI des nov. comm. petr. et le tome V des nova acta ac-

soient p, q, r, et qui en fournit plusieurs autres, attendu qu'on peut renverser chaque expression. Par le moyen de cette équation, on peut, pour chaque valeur de n, former un tableau de toutes les valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$, où il ne restera à déterminer que les transcendantes $\left[\frac{n-2}{1}\right]$, $\left[\frac{n-3}{2}\right]$, $\left[\frac{-4}{3}\right]$, etc. dont le nombre est $\frac{n}{2}-1$, si n est pair, et $\frac{n-1}{2}$, s'il est impair. Nous renvoyons pour les démonstrations à l'ouvrage d'Euler. Voici maintenant quelques autres résultats sur le même objet.

(58). Suivant l'équation (5) on a $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p-q}\right]=\left[\frac{p}{n-p-q}\right]\left[\frac{n-q}{q}\right]$, et $\left[\frac{p}{n-p-q}\right]\left[\frac{n-q}{n-p}\right]=\left[\frac{p}{n-p}\right]\left[\frac{n}{n-p-q}\right]$. Multipliant ces deux équations, et mettant les valeurs connues par les formules (3) et (4), on aura

$$(6)\qquad \left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{n-p}{n-q}\right]=\frac{\pi \sin.(p+q)\frac{\pi}{n}}{n(n-p-q)\sin.\frac{p\pi}{n}\sin.\frac{q\pi}{n}},$$

d'où il suit que la formule $\left[\frac{n-p}{n-q}\right]$ peut toujours se déterminer par la formule $\left[\frac{p}{q}\right]$, qui en est en quelque sorte le complément. On a en particulier

$$(7)\qquad \left[\frac{a}{a}\right]\left[\frac{n-a}{n-a}\right]=\frac{2\pi \cot.\frac{a\pi}{n}}{n(n-2a)}$$

$$(8)\qquad \left[\frac{n-2a}{a}\right]\left[\frac{2a}{n-a}\right]=\frac{\pi}{na\sin.\frac{2a\pi}{n}}.$$

L'équation (5) donne encore $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p}\right]=\left[\frac{p}{n-p}\right]\left[\frac{n}{q}\right]$ ou en mettant les valeurs connues

$$(9)\qquad \left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p}\right]=\frac{\pi}{qn\sin.\frac{p\pi}{n}}.$$

Il résulte de celle-ci

$$\left[\frac{a}{a}\right]\left[\frac{2a}{n-a}\right]=\frac{\pi}{a n \sin.\frac{a\pi}{n}}. \qquad (10)$$

et combinant ce résultat avec l'équation (8), on aura :

$$\left[\frac{a}{a}\right]=\left[\frac{n-2a}{a}\right].\ 2\cos.\frac{a\pi}{n}. \qquad (11)$$

D'où l'on voit que les formules $\left[\frac{n-a}{n-a}\right]$, $\left[\frac{n-2a}{a}\right]$, $\left[\frac{n-a}{2a}\right]$, peuvent se déduire immédiatement de $\left[\frac{a}{a}\right]$.

(59) Venons aux transformations par lesquelles on peut connoître plus précisément la nature de ces fonctions. La substitution $1-x^n=y^n$ conduit à l'équation (1); la substitution $1-x^n=x^n z^n$ donne une transformée rationnelle lorsque $p+q=n$, et il en résulte l'équation (4): dans le cas où n est pair, et où l'on a $p+q=\frac{1}{2}n$, cette même substitution donne la formule

$$\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right]=\int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}, \qquad (12)$$

laquelle doit être intégrée depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$.

Pour obtenir d'autres résultats, supposons $1-x^n=\frac{z^n}{4x^n}$, ou $x^n=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}$, on aura, dans le cas de $p=q=a$, la transformée $\pm 2^{-\frac{2a}{n}}\int\frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}$; et par rapport aux limites, il faut observer que $x=0$ donne $z=0$, $x^n=\frac{1}{2}$ donne $z=1$, et $x=1$ donne $z=0$. D'où il suit que l'intégrale doit être prise deux fois depuis $z=0$, jusqu'à $z=1$. Ainsi, comme on peut mettre x à la place de z, on aura

$$\left[\frac{a}{a}\right]=2^{1-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}. \qquad (13)$$

De-là on tirera les valeurs successives de $\left[\frac{1}{1}\right]$, $\left[\frac{2}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{3}\right]$, etc. sous une forme assez commode, et ces formules peuvent remplacer celles dont nous avons dit qu'Euler se sert pour exprimer toutes les valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$. En effet, dans le tableau de toutes ces valeurs, formé à la manière d'Euler, on trouvera facilement que les formules $\left[\frac{n-2}{1}\right]$, $\left[\frac{n-3}{2}\right]$, etc. peuvent se déterminer par un égal nombre des formules $\left[\frac{1}{1}\right]$, $\left[\frac{2}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{3}\right]$, etc. Or, celles-ci sont maintenant réduites à la forme la plus simple dont elles soient susceptibles.

Remarquons que les équations (7) et (13) combinées, donnent

(14) $$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} \times \int \frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{2\pi \cot. \frac{a\pi}{n}}{n(n-2a)}.$$

Si n étoit pair, et qu'on eut $p-q=\frac{1}{2}n$, la même substitution de $1-x^n=\frac{z^n}{4x^n}$, donneroit cette formule:

(15) $$\left[\frac{\frac{1}{2}n+a}{a}\right] = 2^{-\frac{2a}{n}} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{\frac{1}{2}n})}} = 2^{1-\frac{2a}{n}} \int \frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Et dans le même cas de n pair, on auroit directement, sans substitution,

(16) $$\left[\frac{a}{\frac{1}{2}n}\right] = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Supposons maintenant $1-x^n=\frac{1}{4}z^n x^{2n}$, ou $x^{-n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(1+z^n)}$, on trouvera, dans le cas de $p+2q=n$, cette nouvelle formule,

(17) $$\left[\frac{n-2a}{a}\right] = 2^{-\frac{2a}{n}} \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}.$$

qui doit être intégrée depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$, et qui suppose $a < \frac{1}{2} n$. Cette formule n'est pas moins simple que la formule (13), et elle peut servir au même usage; car si on la combine avec l'équation (11), on en tire,

$$\left[\frac{a}{a}\right] = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos. \frac{a\pi}{n} \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}. \qquad (18)$$

Il faut donc qu'on ait généralement,

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos. \frac{a\pi}{n} \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}; \qquad (19)$$

la première intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, et la seconde depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$. J'observe, à l'égard de cette équation, que si n est impair, et qu'on fasse $x=1-y^2$ dans le premier membre, et $z=y^2-1$ dans le second, l'un et l'autre se réduiront à la même formule; savoir :

$$\int \frac{(1-y^2)^{a-1}dy}{\sqrt{\left[n - \frac{n.n-1}{2}y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}y^4 - \text{etc.}\right]}}.$$

Cette intégrale, dans le premier membre, est prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et dans le second, depuis $y=1$ jusqu'à $y=\infty$. Donc ces deux parties sont entr'elles $:: \cos. \frac{a\pi}{n} : 1$.

Au reste, quel que soit n pair ou impair, la formule (19) venant de la formule (17), suppose $a < \frac{1}{2} n$; car, d'ailleurs si on avoit $a =$, ou $> \frac{1}{2} n$, le second membre deviendroit infini; et pour que l'équation eût toujours lieu, il faudroit la mettre sous la forme

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos. \frac{a\pi}{n} . \int \left\{ \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} - z^{a-\frac{1}{2}n-1} dz \right\}: \qquad (20)$$

ce qu'on trouveroit par la dernière substitution, en supposant $p+2q=2n$. De là résulte la manière d'évaluer

l'intégrale du second membre ; car, au moyen des équations (14) et (19), on trouve, a étant $> \frac{1}{2} n$,

$$(21)\quad \int \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \times \int \left\{ \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} - z^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dz \right\} = \frac{4\pi}{n(2a-n)\sin.\frac{a\pi}{n}}$$

(55). Lorsque n est impair, le nombre des transceudantes nécessaires pour déterminer toutes les formules $\left[\frac{p}{q}\right]$, ne sauroit se réduire au-dessous de $\frac{n-1}{2}$: lorsque n est pair, ce nombre peut se réduire à $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

En effet, par la combinaison des équations (12) et (18), on trouve,

$$(22)\quad \left[\frac{a}{a}\right] = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos.\frac{a\pi}{n} \left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right] :$$

Or, la formule $\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right]$, qui est la même chose que $\left[\frac{a}{\frac{1}{2}n-a}\right]$, ne présente de valeurs différentes qu'un nombre $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

Cette dernière équation donne, en mettant $\frac{1}{2}n - a$ à la place de a,

$$\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right] = 2^{\frac{2a}{n}} \sin.\frac{a\pi}{n} \left[\frac{a}{\frac{1}{2}n-a}\right],$$

et ainsi on a directement

$$(23)\quad \left[\frac{a}{a}\right] = 2^{1-\frac{4a}{n}} \cot.\frac{a\pi}{n} \left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right],$$

d'où l'on voit qu'il suffit d'avoir les valeurs de $\left[\frac{a}{a}\right]$, dans les seuls cas où a ne surpasse pas $\frac{1}{2}n$.

Si

Si dans l'équation (22) on met $\frac{1}{2}n - a$ à la place de a, on aura

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = \int \frac{z^{\frac{1}{2}n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}, \qquad (24)$$

équation qui d'ailleurs se vérifie immédiatement en mettant $\frac{1}{z}$ à la place de z, dans le premier membre : elle suppose toujours $a < \frac{1}{2}n$. De là et de l'équation (19), on tirera cette autre égalité, qui n'est pas aussi évidente.

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cot. \frac{a\pi}{n} \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}. \qquad (25)$$

Ces résultats généraux vont répandre un grand jour sur les exemples particuliers. (*Voyez l'ouvrage cité d'Euler, article 392 et suivans*).

(60). *Exemple Ier*. Si $n = 3$, la seule transcendante requise est

$$\left[\frac{1}{1}\right] = 2^{\frac{2}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2^{-\frac{2}{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}$$

et sa valeur, qu'on a déjà trouvée dans l'article 35, est :

$$\left[\frac{1}{1}\right] = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[4]{3}} F^1 c = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{27}} F^1 b,$$

le module c étant sin. 75°, ou b étant sin. 15°.

Exemple II. Si $n = 4$, il suffit de la transcendante

$$\left[\frac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}},$$

dont la valeur est $F^1 c$, c étant $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou sin. 45°.

N

Exemple III. Le cas de $n = 5$ offre les deux transcendantes

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{3}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = 2^{\frac{3}{5}} \cos. \frac{\pi}{5} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^5)}},$$

$$\left[\tfrac{2}{2}\right] = 2^{\frac{1}{5}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-z^5)}} = 2^{\frac{1}{5}} \cos. \frac{2\pi}{5} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^5)}};$$

mais elles ne paroissent pas réductibles aux fonctions elliptiques.

Exemple IV. Le cas de $n = 6$ offre la seule transcendante

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{2}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = 2^{\frac{2}{3}} \cos. \frac{\pi}{6} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^6)}}.$$

La première forme, en faisant $\frac{1}{x^2} = 1 + z^2$, donnera pour résultat $\left[\tfrac{1}{1}\right] = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{3}}.\ F^1 b$, le module b étant sin. 15°. La seconde forme, en faisant $\frac{1}{z^2} = y_1^2 - 1$, donneroit pour résultat $\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{2}{3}} \cos. \frac{\pi}{6} F^1 c$, c étaftt sin. 75°. Ces deux résultats devant revenir au même, il faut douc qu'on ait $F^1 c = \sqrt{3}\, F^1 b$, comme nous l'avons trouvé dans l'art. 36. La transcendante $\left[\tfrac{1}{1}\right]$ étant ainsi connue, on en peut déduire les deux dont Euler se sert pour déterminer toutes les autres; elles seront

$$\left[\tfrac{4}{1}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{1}\right],\quad \left[\tfrac{3}{2}\right] = \frac{2^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{1}\right].$$

Exemple V. Le cas de $n = 8$ offre les deux transcendantes

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{3}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} = 2^{\frac{3}{4}} \cos. \frac{\pi}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^8)}},$$

$$\left[\tfrac{2}{2}\right] = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}} = 2^{\frac{1}{2}} \cos. \frac{\pi}{4} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^8)}}.$$

La seconde, en mettant x^2 à la place de x, devient $2^{-\frac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, et ainsi sa valeur est $\left[\frac{2}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{F}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Pour évaluer la formule $\left[\frac{1}{1}\right]$ nous choisirons la seconde forme, et faisant $1+z^4=pz^2$, ce qui donne $z=\frac{1}{2}\sqrt{(p+2)}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p-2)}$, nous aurons par la substitution

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}}=\frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p+2)}\cdot\sqrt{(p^2-2)}}\mp\frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p-2)}\cdot\sqrt{(p^2-2)}}.$$

Ces deux parties doivent être intégrées deux fois, depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$, et comme dans chaque intervalle elles sont de signes contraires, il suffira de prendre le double de la plus grande partie et d'intégrer $\frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p-2)}\cdot\sqrt{(p^2-2)}}$, depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$. Soit $p=2+q^2$, on aura donc,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}}=\int\frac{dq}{\sqrt{(q^2+2-\sqrt{2})}\cdot\sqrt{(q^2+2+\sqrt{2})}},$$

les limites de q étant 0 et ∞. Faisons, pour abréger, $m=\sqrt{(2+\sqrt{2})}=2\cos.\frac{\pi}{8}$, $q=m\cot.\phi$, $c^2=2\sqrt{2}-2$, et la transformée sera $\frac{1}{m}\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$, dont l'intégrale entre les limites requises, est $\frac{1}{m}\mathrm{F}^1c$. On peut remarquer que le module c a pour complément $b=\sqrt{2}-1$, de sorte que la fonction elliptique qui se rencontre dans ce résultat, est celle que nous avons déja considérée dans l'art. 37, et qui a des propriétés particulières. On aura en conséquence

$$\left[\frac{1}{1}\right]=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{F}^1c=\sqrt{2}\,\mathrm{F}^1b\;(b=\sqrt{2}-1).$$

Si on fait maintenant $\left[\frac{1}{1}\right]=\mathrm{M}$, $\left[\frac{2}{2}\right]=\mathrm{N}$, on déduira de ces valeurs connues, celles des trois transcendantes qui sont

[Handwritten marginal note, largely illegible: … $1+x^2=pz$ … $\frac{dy}{\sqrt{(1-\ldots y^2)(1-\ldots y^2)}}$ … soit $y=\ldots\sin\varphi$, $b^2=\ldots(\sqrt{2}-1)^2$ ou $b=\sqrt{2}-1$ on aura $\frac{1}{m}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\varphi)}}$ dont l'int. est $\frac{1}{m}F(b,\frac{3\pi}{8})$ donc $F(b,\frac{3\pi}{8})=F_1c=\sqrt{2}\cdot F_1b$. Voilà donc un cas où la fonct. part. … [illegible]]

nécessaires dans la méthode d'Euler pour former le tableau des valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$, et on aura

$$\left[\frac{6}{1}\right]=\frac{M}{2\cos.\frac{\pi}{8}},\ \left[\frac{5}{2}\right]=\frac{2^{-\frac{3}{4}}N}{\cos.\frac{\pi}{8}},\ \left[\frac{4}{3}\right]=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{8}}M.$$

Exemple VI. Le cas de $n=10$ dépend des deux seules transcendantes

$$\left[\frac{4}{1}\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{10})}},\ \left[\frac{3}{2}\right]=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^{10})}}.$$

Car, suivant l'équation (22), ces deux valeurs suffisent pour déterminer toutes celles de $\left[\frac{a}{\alpha}\right]$. Or, $\left[\frac{4}{1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{4}\right]$, est aussi représenté par $\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1+z^{10})}}$, et en mettant z^2 à la place de z, dans cette valeur, ainsi que dans celle de $\left[\frac{3}{2}\right]$, les deux transcendantes dont il s'agit seront,

$$\left[\frac{4}{1}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^5)}},\ \left[\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^5)}}.$$

Elles sont les mêmes que dans le cas de $n=5$. En général le cas de $n=4m+2$ se ramènera toujours à celui de $n=2m+1$.

Exemple VII. Enfin nous examinerons le cas de $n=12$, comme donnant lieu à des réductions remarquables. Ce cas dépend des trois formules

$$\left[\frac{5}{1}\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}},\ \left[\frac{4}{2}\right]=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}},\ \left[\frac{3}{3}\right]=\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}.$$

La formule $\left[\frac{4}{2}\right]$ ou $\left[\frac{2}{4}\right]$ est aussi égale à $\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$, et elle se réduit à $\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}$, en mettant z à la place de z^4. De même la formule $\left[\frac{3}{3}\right]$, en mettant z à la place de z^3, se

réduit à $\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}}$; ces valeurs étant connues, on aura d'abord

$$\left[\tfrac{4}{2}\right]=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\,F\,1\,(c=\sin.\,15^\circ)$$

$$\left[\tfrac{3}{3}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^6)}}=\frac{1}{3}\,F\,1\,(c=\sin.\,45^\circ).$$

Il reste à déterminer la formule $\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$. Pour cela soit $1+z^4=pz^2$, la différentielle à intégrer deviendra,

$$\frac{\frac{1}{4}dp}{\sqrt{(p^4-3p)}}\pm\frac{\frac{1}{4}dp\sqrt{p}}{\sqrt{(p^2-3)}.\sqrt{(p^2-4)}},$$

et on trouvera, comme ci-dessus, que tout se réduit à intégrer le double de la seconde partie, depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$. Soit $p=q^2$, on aura donc

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}=\int\frac{q^2\,dq}{\sqrt{(q^8-7q^4+12)}}.$$

Si on fait maintenant $m^4=12$, et $q^4+m^2=q^2y$, ce qui donne $2q=\sqrt{(y+2m)}+\sqrt{(y-2m)}$, on aura pour transformée,

$$\int\frac{\frac{1}{4}dy}{\sqrt{(y+2m)}.\sqrt{(y^2-2m^2-7)}}+\int\frac{\frac{1}{4}dy}{\sqrt{(y-2m)}.\sqrt{(y^2-2m^2-7)}},$$

dont les deux parties doivent être intégrées depuis $y=2+\sqrt{3}$, ou $y^2=2m^2+7$, jusqu'à $y=\infty$. Soit $2+\sqrt{3}=n$, $y+2m=x^2$, la première partie deviendra

$$\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x^2-2m-n)}.\sqrt{(x^2-2m+n)}}.$$

Enfin, soit $x^2=\frac{2m+n}{\cos.^2\phi}$ et $c^2=\frac{n-2m}{2n}$, ou $c=\frac{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, et la dernière transformée sera $\frac{1}{2\sqrt{2n}}\int\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$, dont la va-

En faisant $z^2+1=q^2$ on aura l'int. $\frac{(q^2-1)\,dq}{\sqrt{(q^2-4.\,q^2-1.\,q^4-4q^2+1)}}$ en faisant $q^2-2=r$ on retombe sur la f. $\frac{\frac{1}{2}dr\sqrt{r}}{\sqrt{(r^2-3)}\sqrt{(r^2-4)}}$

$b=\frac{\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$

$c=\sin\alpha$, $b=\cos\alpha$ } $\sin\alpha=\tan^2 15^\circ$ $\alpha=4^\circ\,3'\,54''$ $\tan(45-\alpha)=\sqrt{\sin 60^\circ}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}$

leur entre les limites requises est $\frac{1}{2\sqrt{2n}}$ F 1 c, ou $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ F 1 c.
Pareillement, si on fait $b = \frac{\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, l'intégrale de la seconde partie en y, sera $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ F 1 b; et nous désignons le second module par b, parce qu'en effet on a $b^2 + c^2 = 1$, et qu'ainsi ils sont complément l'un de l'autre. On aura donc,

$$\left[\frac{5}{1}\right] = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right) (\text{F}\,1\,b + \text{F}\,1\,c).$$

Or il arrive, par rapport à ces fonctions, qu'on a exactement F 1 b = 3 F 1 c, la valeur de $\left[\frac{5}{1}\right]$ se réduit donc à celle-ci: $\left[\frac{5}{1}\right] = (\sqrt{3} - 1)$ F 1 c; et comme c est très-petit, cette fonction sera très-facile à évaluer. D'où l'on voit que le cas de $n = 12$ est encore résolu complètement par les fonctions elliptiques de la première espèce.

FIN.

DISSERTATION

SUR

LA QUESTION DE BALISTIQUE

PROPOSÉE

PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES ET BELLES - LETTRES DE PRUSSE

POUR

LE PRIX DE 1782,

QUI LUI A ÉTÉ ADJUGÉ DANS L'ASSEMBLÉE PUBLIQUE DU 6 JUIN.

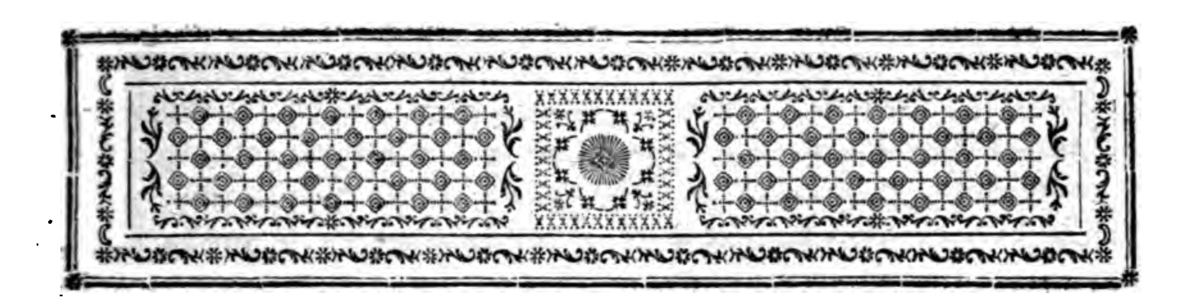
PAR M. LE GENDRE,

ancien Professeur de Mathématiques à l'école royale militaire, à Paris.



À BERLIN

CHEZ G. J. DECKER, IMPRIMEUR DU ROI.



RECHERCHES

SUR

LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANS.

— — — *Tolluntur in altum*
Ut lapſu graviore ruant. — — —

I.

NEWTON eſt le premier qui ait fait des recherches ſur les trajectoires dans les milieux réſiſtans; il aſſigne particulierement celle qui a lieu dans l'hypotheſe de la réſiſtance proportionnelle à la ſimple vîteſſe; mais il ne donne que des approximations aſſez groſſieres pour la trajectoire qui a lieu lorsque la réſiſtance eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe. S'il n'a pas donné la vraie conſtruction de cette courbe, c'eſt ſans doute parce qu'il l'a jugée trop compliquée pour que la pratique en pût tirer quelqu'avantage. Car il n'eſt pas à préſumer que ce petit probleme d'Analyſe eût arrêté l'inventeur des nouveaux calculs. Quoi qu'il en ſoit, l'honneur de la découverte eſt dû à Jean Bernoulli, qui en a publié une ſolution générale, en ſuppoſant la réſiſtance comme une puiſſance quelconque de la vîteſſe. Long-tems après, M. Euler a repris la même queſtion dans

les Mém. de l'Acad. de Berlin pour l'année 1753; son but est d'appliquer la théorie à la Balistique, & il propose pour cela des moyens fort ingénieux. Dans les Mém. de la même Académie pour l'année 1765 & ailleurs, on trouve des recherches fort étendues de M. Lambert sur le même objet. M. le Chevalier de Borda dans les Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris pour l'année 1769 a traité cette question avec son élégance & sa finesse ordinaires; d'après l'idée de Newton il substitue à la vraie trajectoire celle qui seroit décrite en vertu d'une densité très peu variable, & il obtient par ce moyen une approximation fort supérieure à celle de Newton. Enfin M. Bézout, dans son Cours d'Artillerie qui a paru en 1772, a fait une application plus particuliere des méthodes qui lui sont propres, au jet des bombes & des boulets. Tels sont les principaux auteurs qui ont écrit sur cette matiere. Heureux si, en profitant de leurs découvertes, j'avois pu remplir les vues de l'Académie!

Équation de la trajectoire.

Fig. 2. 2. J'appelle l'angle de projection PAV - - θ
La vîtesse de projection - - - V
La hauteur dûe à cette vîtesse - - h
La gravité ou la vîtesse qu'elle imprime dans une seconde g
La vîtesse à un point quelconque M - - u
La hauteur dûe à cette vîtesse - - - z
L' angle que fait en M la direction du mobile avec l'horizon - - - - ϕ
L'élément du tems - - - dt
Puis à l'ordinaire $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$.

La résistance du milieu étant supposée proportionnelle au quarré de la vîtesse, je la représenterai par $\frac{u^2}{2k}$ où $\frac{z}{k}g$. La quantité k désignera la hauteur dûe à la vîtesse avec laquelle le mobile éprouve une résistance égale à son poids. Si le milieu est d'une densité uniforme, k sera constant; mais si la densité est variable, $\frac{1}{k}$ sera variable aussi & proportionnel à la densité.

3. Cela posé, la force retardatrice en M sera $\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dx}{ds}$ suivant PA, & $\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dy}{ds} + g$ suivant MP. On observera que dans cette derniere force au lieu de g il faudroit mettre $\left(1 - \frac{\delta'}{\delta}\right) g$, si la densité δ' du fluide étoit comparable à la densité δ du corps. Mais dans le jet des bombes & des boulets, on peut en toute sureté négliger $\frac{\delta'}{\delta}$. On aura donc suivant les principes de la Méchanique

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dx}{ds}\, dt$$

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{u^2}{2k} \cdot \frac{dy}{ds}\, dt - g\,dt.$$

Faisant $dy = p\,dx$, & supposant dx constante, ces équations deviendront

$$dx\,dp = -g\,dt^2$$

$$k\,ddp = dp\,ds.$$

La seconde est l'équation de la trajectoire; l'autre donnera la vîtesse & le tems de mouvement.

4. Nous supposerons que la densité $\frac{1}{k}$ est constante, & dans cette hypothese l'équation $k\,ddp = dp\,ds$ aura pour intégrale $\frac{dp}{dx} = Ae^{\frac{s}{k}}$. Pour déterminer la constante A, on prendra l'équation $dp\,dx = -g\,dt^2$ qui donne $\frac{dp}{dx} = -\frac{g\,dt^2}{dx^2}$; & comme au point de projection la vîtesse horizontale $\frac{dx}{dt} = V\cos\theta$, on aura $A = -\frac{g}{V^2\cos^2\theta} = -\frac{1}{2h\cos^2\theta}$. Donc

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{s}{k}}}{2h\cos^2\theta}.$$

On aura en même tems la hauteur dûe à la vîtesse en M

$$z = \frac{h\cos^2\theta}{\cos^2\varphi}\, e^{-\frac{s}{k}}.$$

5. L'équation différentielle qu'on vient de trouver étant multipliée par ds & intégrée donnera

$$e^{\frac{s}{k}} = 1 + \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\left(\frac{\mathrm{fin}\,\theta}{\mathrm{cof}^2\theta} + \mathrm{L}\ \mathrm{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right) - \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\,[p\sqrt{(1+pp)} + \mathrm{L}\,(p + \sqrt{(1+pp)})]$$

d'où réfultera, en éliminant $e^{\frac{s}{k}}$ & féparant,

$$\frac{\mathrm{d}x}{2k} = \frac{-\mathrm{d}p}{\frac{k}{h\,\mathrm{cof}^2\theta} + \frac{\mathrm{fin}\,\theta}{\mathrm{cof}^2\theta} + \mathrm{L}\ \mathrm{tang}\,(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) - p\sqrt{(1+pp)} - \mathrm{L}\,(p + \sqrt{(1+pp)})}$$

On en concluroit auffi la valeur de $p\,\mathrm{d}x$ ou de dy. Mais malheureufement ces formules ne font pas intégrables, & ne fe prêtent pas même aux approximations, fi ce n'eft dans un très petit nombre de cas.

6. Si le milieu ne réfifte pas, ou du moins fi la vîteffe de projection eft affez petite pour que $\frac{h}{k}$ foit confidérée comme nulle, on aura $\mathrm{d}x = -2h\,\mathrm{cof}^2\theta\,.\,\mathrm{d}p$. Donc $p = \mathrm{tang}\,\theta - \frac{x}{2h\,\mathrm{cof}^2\theta}$, & $y = x\ \mathrm{tang}\,\theta - \frac{xx}{4h\,\mathrm{cof}^2\theta}$. Équation à la parabole, d'où l'on déduit la hauteur du jet $= h\,\mathrm{fin}^2\theta$, & fon amplitude $= 4h\,\mathrm{fin}\,\theta\,\mathrm{cof}\,\theta$.

7. Si la réfiftance du milieu fans être abfolument nulle eft affez petite, eu égard à la vîteffe de projection, pour qu'on puiffe rejetter les puiffances de $\frac{h}{k}$ fupérieures à la premiere, on aura affez exactement

$$-\frac{\mathrm{d}x}{2h\,\mathrm{cof}^2\theta} = \mathrm{d}p - \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\,\mathrm{d}p\left(\frac{\mathrm{fin}\,\theta}{\mathrm{cof}^2\theta} + \mathrm{L}\ \mathrm{tang}\,(45 + \tfrac{1}{2}\theta)\right) + \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\,\mathrm{d}p\,(p\sqrt{(1+pp)} + \mathrm{L}\,(p + \sqrt{(1+pp)}))$$

dont l'intégrale eft

$$\frac{x}{2h\,\mathrm{cof}^2\theta} = \mathrm{tang}\,\theta - p - \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\left(\frac{\mathrm{fin}\,\theta}{\mathrm{cof}^2\theta} + \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,(45 + \tfrac{1}{2}\theta)\right)(\mathrm{t}.\theta - p) - \frac{h\,\mathrm{cof}^2\theta}{k}\left(\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{(1+pp)} + p\,\mathrm{L}\,(p + \sqrt{(1+pp)})\right)$$

$$+\frac{h\,\text{cos}^2\theta}{k}\left(\frac{1}{3\,\text{cos}^3\theta}-\frac{1}{\text{cos}\,\theta}+\text{tang}\,\theta\ \text{L}\ \text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right);$$

traitant de même la valeur de dy ou de $p\,dx$, on trouvera

$$\frac{y}{2h\,\text{cos}^2\theta}=\frac{\text{t.}^2\theta-p^2}{2}-\frac{h\,\text{cos}^2\theta}{k}\left(\frac{\text{sin}\,\theta}{\text{cos}^2\theta}+\text{L}\,\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right)\left(\frac{\text{t.}^2\theta-p^2}{2}\right)$$

$$-\frac{h\,\text{cos}^2\theta}{k}\left(\frac{2p^3-p}{8}\sqrt{(1+pp)}+\frac{4pp+1}{8}\text{L}(p+\sqrt{(1+pp)})\right)$$

$$+\frac{h\,\text{cos}^2\theta}{k}\left(\frac{2\,\text{tang}^3\theta-\text{tang}\,\theta}{8\,\text{cos}\,\theta}+\frac{4\,\text{tang}^2\theta+1}{8}\ \text{L}\ \text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Si on fait $p = o$, on aura la hauteur du jet

$$h\,\text{sin}^2\theta-\frac{h^2\,\text{cos}^4\theta}{4k}\left(\frac{2\,\text{tang}^3\theta+\text{tang}\,\theta}{\text{cos}\,\theta}-\text{L}\ \text{tang}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Si on fait $y = o$ pour avoir l'angle de chûte, on trouvera sa tangente

$$p=-\text{tang}\,\theta-\frac{h\,\text{cos}^2\theta}{k}\left(\frac{2\,\text{t.}^2\theta-1}{8\,\text{cos}\,\theta}+\frac{4\,\text{t.}^2\theta+1}{8\,\text{tang}\,\theta}\,\text{L}\,\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

Substituant cette valeur dans celle de x, on aura l'amplitude du jet

$$4h\,\text{sin}\,\theta\,\text{cos}\,\theta-\frac{2h^2\,\text{cos}^4\theta}{k}\left(\frac{14\,\text{tang}^2\theta+1}{8\,\text{cos}\,\theta}+\frac{12\,\text{tang}^2\theta-1}{8\,\text{tang}\,\theta}\,\text{L}\,\text{t.}\,(45^\circ+\tfrac{1}{2}\theta)\right).$$

On pourroit avec un peu de patience pousser ce calcul jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{h^2}{k^2}$, & les formules qui en résulteroient pourroient s'appliquer dans différens cas du jet des bombes où $\frac{h}{k}$ est sensiblement au dessous de l'unité.

Proprietés générales de la trajectoire.

8. Soit ASB la vraie trajectoire du mobile, ASB' celle qu'il auroit décrite dans le vuide avec la même vîtesse & le même angle de projection. Soient pris dans ces trajectoires deux points N & N' où les tangentes soient

Note. ces Calculs de l'art. 7 sont affectés d'une legere erreur qu'il faudroit corr. si on vouloit appliquer les résultats.

paralleles; la formule trouvée (5) donnera $e^{\frac{AN}{k}} = 1 + \frac{AN'}{k}$, ou $\frac{AN}{k} = L\left(1 + \frac{AN'}{k}\right)$. Propriété qui établit une correſpondance remarquable entre ces deux trajectoires.

Fig. 2. 9. Si on veut ſavoir ce que devient la courbe ASB prolongée du côté de A au deſſous de l'horizontale AB, on fera AN & AN' négatifs dans l'équation précédente, ce qui donnera $\frac{AN}{k} = -L\left(1 - \frac{AN'}{k}\right)$. D'où il ſuit qu'en prenant ſur la parabole l'arc $AN' = k$ & menant la tangente $N'V'$, la trajectoire BAN aura une aſymptote XZ parallele à $N'V'$.

10. Si on prend l'arc parabolique An' de plus en plus grand, l'arc correſpondant An de la trajectoire augmentera auſſi, mais beaucoup moins rapidement. Donc An' étant infini, An le ſera auſſi. Mais l'infini logarithmique étant du dernier ordre, on voit que la courbe Bn ne tardera pas à ſe confondre avec une ligne verticale, & qu'elle doit avoir par conſéquent une aſymptote verticale.

Fig. 4. 11. C'eſt ce dont on achevera de ſe convaincre en conſidérant le mouvement d'un corps lancé ſuivant la direction AV, qui fait avec l'horizontale un angle θ' déjà fort près de 90°. Dans ce cas nous appellerons PM, y, & tang AMQ ou $\frac{dy}{dx} = p$; p ſera une quantité fort grande & qui augmente jusqu'à l'infini. Nous aurons alors $dp\sqrt{(1 + pp)} = \frac{e^{\frac{s}{k}} ds'}{2h'\cos^2\theta'}$; mais comme on peut mettre ſans erreur ſenſible p au lieu de $\sqrt{(1 + pp)}$, on aura en intégrant $pp - \tang^2\theta' = \frac{k}{h'\cos^2\theta'}\left(e^{\frac{s'}{k}} - 1\right)$. Éliminant $e^{\frac{s'}{k}}$, on a $\frac{dx}{2k} = \frac{dp}{pp + \frac{k - h'\sin^2\theta'}{h'\cos^2\theta'}}$. Or il eſt aiſé de démontrer que $\frac{k - h'\sin^2\theta'}{h'\cos^2\theta'}$ eſt une quantité poſitive; je l'appelle m^2, & j'ai

en

en intégrant $\frac{mx}{2k}$ = Arc tang $\frac{p}{m}$ — Arc tang $\frac{\text{tang}\,\theta}{m}$. D'où résulte x égale à une quantité finie lorsque p est infini. Donc la courbe AM a une asymptote verticale DY. Il en est de même de la courbe Bn, (Fig. 2) puisqu'à une distance assez petite de B, l'angle de la courbe avec l'horizontale est déjà fort près de 90°.

12. Quant à la proposition avancée, que $k - h' \sin^2 \theta'$ est une quantité positive, on pourroit se dispenser de la démontrer, puisque cette quantité étant supposée négative, l'équation $\frac{dx}{2k} = \frac{dp}{pp - mm}$ indiqueroit toujours une asymptote verticale. Cependant si on en vouloit la démonstration, on appelleroit $-\theta'$ la valeur de ϕ & h' celle de z au point N (Fig. 1); on auroit (4) $h' \cos^2 \theta' = h \cos^2 \theta\, e^{-\frac{s}{k}}$. Donc $k - h' \sin^2 \theta'$ $= k e^{-\frac{s}{k}} \left(e^{\frac{s}{k}} - \frac{h \cos^2 \theta}{k} \cdot \frac{\sin^2 \theta'}{\cos^2 \theta'}\right)$; & comme $e^{\frac{s}{k}} = 1 + \frac{h \cos^2 \theta}{k}$ $\left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \text{L tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)\right) + \frac{h \cos^2 \theta}{k}\left(\frac{\sin \theta'}{\cos^2 \theta'} + \text{L tang}\,(45 + \tfrac{1}{2}\theta')\right)$, il est clair que $e^{\frac{s}{k}} - \frac{h \cos^2 \theta}{k} \cdot \frac{\sin^2 \theta'}{\cos^2 \theta'}$ est nécessairement positif.

13. Puisque notre trajectoire a deux asymptotes, l'une verticale, l'autre qui fait avec l'horizon un angle plus grand que θ, elle ressemble assez à une hyperbole dont une asymptote seroit verticale. Newton cherche dans ses Principes quelle doit être la densité du milieu pour que l'hyperbole Fig. 5.
soit la vraie trajectoire du mobile. Ce probleme est facile à résoudre par l'équation $k\,\mathrm{dd}p = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$, dans laquelle $\frac{1}{k}$ peut représenter la densité. Car l'équation de l'hyperbole étant de cette forme $y = \frac{ax - xx}{b - x} \cdot \frac{b}{a}$ tang θ, on en déduira facilement $\frac{\mathrm{dd}p}{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}s}$ ou $\frac{1}{k} = \frac{3}{V(bb - ab)} \cdot \frac{V\left(1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{\text{tang}\,\theta}\right)}{V(1 + pp)}$.

14. Si cette quantité pouvoit être regardée comme suffisamment constante dans toute l'étendue de la courbe, on auroit une approximation fort simple pour les trajectoires dans les milieux résistans. C'étoit là le but de Newton; mais si on examine la densité, on trouvera qu'elle varie entre *A* & *S*, depuis $\frac{3}{b}$ cos θ jusqu'à $\frac{3}{\sqrt{(bb - ab)}}$. Elle augmente encore au delà de *S*, mais jusqu'à un certain point seulement; enfin au point de chûte *B* elle devient $\frac{3}{\sqrt{((b-a)^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \theta)}}$. Il est bien difficile, comme on voit, de concilier ces valeurs avec l'hypothese d'une densité constante, à moins que l'angle de projection ne soit fort petit. Cependant on verra par la suite que la branche descendante de cette hyperbole peut être employée dans bien des cas pour représenter à très peu près la vraie trajectoire.

15. Si on supposoit la vîtesse & la densité au point de projection dans cette trajectoire hyperbolique, comme elles sont dans la vraie trajectoire, il faudroit prendre $\frac{ab}{b-a} = 4h \sin\theta \cos\theta$ & $b = 3\ k \cos\theta$, & l'amplitude du jet seroit

$$a = \frac{4h \sin\theta \cos\theta}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{k} \sin\theta}$$

amplitude évidemment trop petite, puisque la résistance n'est vraie qu'au point de projection, & qu'elle est trop petite dans tous les autres points. Mais cette valeur sera d'autant plus près de la vérité, que *k* sera plus grand & θ plus petit. Cette formule seroit très commode pour calculer les portées de but en blanc des pieces de canon.

16. Pour revenir aux propriétés générales, on observera que la branche descendante *BS* differe d'autant plus de la branche ascendante *AS* que *h* est plus grand par rapport à *k*. La branche ascendante est presque droite dans une étendue assez considérable, surtout lorsque la vîtesse de projection est fort grande; au contraire la branche descendante est sensiblement courbe dans toute son étendue. Quant à la vîtesse du projectile, elle va continuellement en diminuant jusqu'à un certain point *N* dans la branche descen- Fig. 1.

dante. Elle augmente enſuite, mais d'une maniere peu rapide, puisqu'à l'infini la hauteur dûe à la vîteſſe eſt k. C'eſt ce que nous développerons davantage dans l'exemple que nous allons calculer.

Premiere méthode d'approximation.

17. Nous prendrons k pour l'unité, & nous ſuppoſerons qu'on connoît l'angle de projection θ, ainſi que la hauteur h dûe à la vîteſſe de projection. Soit par ex. $h = 10$ & $\theta = 45°$, l'équation de la trajectoire (5) deviendra

$$s = 12,477936 - 5\left(\frac{\text{ſin}\,\phi}{\text{coſ}^2\,\phi} + \text{L tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\,\phi)\right).$$

Je donne à ϕ différentes valeurs de cinq en cinq degrés, 40, 35, 30, &c. Il en réſulte autant de valeurs de s dont les différences premieres, que je nomme ∂s, ſont les petits arcs parcourus pendant que la direction du corps varie de 5°. Ces différences ſervent à trouver celles de l'abſciſſe & de l'ordonnée, en conſidérant que l'élément ∂s peut être regardé comme une petite ligne droite inclinée à l'horizon d'une quantité moyenne entre les inclinaiſons de ſes deux extrémités. Par ex. ſi l'élément ∂s eſt parcouru entre les degrés d'inclinaiſon 30 & 35, j'en conclus $\partial y = \partial s$ ſin $32°\frac{1}{2}$ & $\partial x = \partial s$ coſ $32°\frac{1}{2}$. On verra ci-deſſous quel eſt le degré d'approximation qu'on peut obtenir par cette voie.

18. Pour faciliter le calcul on voit qu'il eſt néceſſaire d'avoir une Table des valeurs de $\frac{\text{ſin}\,\phi}{\text{coſ}^2\,\phi}$ + L tang $(45° + \frac{1}{2}\phi)$, au moins de cinq en cinq degrés. En voici une qui n'eſt pas complete, mais qui ſuffit pour notre objet.

Asymptote inclinée
$s = -\infty$ $\phi = 46°\ 55'\ 13''.4$

ϕ	$\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} + L\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$	ϕ	$\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} + L\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$
0°	0,000 000	43°	2,107 894
5	0,175 200	44	2,199 368
10	0,354 473	45	2,295 587
13	0,465 806	50	2,864 724
15	0,542 244	55	3,644 135
20	0,743 708	60	4,781 059
25	0,965 389	65	6,580 790
30	1,215 973	70	9,768 500
35	1,507 632	74	14,614 441
40	1,858 276	75	16,447 126

19. Si l'on procede maintenant au calcul que nous venons d'indiquer & qu'on ajoute les δy depuis $\phi = 45^\circ$ jusqu'à $\phi = 0$, on aura la hauteur du jet. Faisant ensuite ϕ négatif, & observant qu'alors $\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi} + L\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$ ne fait que changer de signe & conserve la même valeur, on poussera le calcul jusqu'à ce que la somme des δy négatifs égale à peu près la hauteur du jet. De cette maniere on trouvera les résultats compris dans la Table suivante: nous avons pris les premieres valeurs de ϕ plus proches les unes des autres, afin d'obtenir une plus grande approximation.

41 | 1.937 679
42°. | 2.020 780
46 | 2,3969507
47 | 2.504346

Φ	s	δs	Inclin. moyen.	δy	δx
45°	0,000 000				
44	0,392 782	0,392 782	44° ½	0,275 305	0,280 152
43	0,661 897	0,269 115	43 ½	0,185 247	0,195 209
40	1,158 940	0,497 043	41 ½	0,329 351	0,372 263
35	1,597 320	0,438 380	37 ½	0,266 869	0,347 792
30	1,855 997	0,258 677	32 ½	0,138 988	0,218 167
25	2,034 837	0,178 840	27 ½	0,082 579	0,158 633
20	2,170 127	0,135 290	22 ½	0,051 773	0,124 992
15	2,278 980	0,108 853	17 ½	0,032 733	0,103 815
10	2,370 764	0,091 784	12 ½	0,019 866	0,089 608
5	2,451 172	0,080 408	7 ½	0,010 495	0,079 720
0	2,523 962	0,072 790	2 ½	0,003 175	0,072 721
Somme des δy & des δx dans la branche ascendante				1,396 381	2,043 072
— 5	2,591 811	0,067 849	— 2 ½	—0,002 960	0,067 784
—10	2,656 778	0,064 967	— 7 ½	—0,008 480	0,064 411
—15	2,720 582	0,063 804	—12 ½	—0,013 810	0,062 291
—20	2,784 563	0,063 981	—17 ½	—0,019 239	0,061 020
—25	2,850 989	0,066 426	—22 ½	—0,025 420	0,061 370
—30	2,920 890	0,069 901	—27 ½	—0,032 277	0,062 003
—35	2,996 537	0,075 647	—32 ½	—0,040 645	0,063 800
—40	3,080 501	0,083 964	—37 ½	—0,051 114	0,066 614
—45	3,176 213	0,095 712	—42 ½	—0,064 662	0,070 566
—50	3,288 460	0,112 247	—47 ½	—0,082 757	0,075 833
—55	3,424 217	0,135 757	—52 ½	—0,107 703	0,082 644
—60	3,594 108	0,169 891	—57 ½	—0,143 285	0,091 282
—65	3,815 113	0,221 005	—62 ½	—0,196 034	0,102 049
—70	4,116 113	0,301 000	—67 ½	—0,278 088	0,115 188
—75	4,550 857	0,434 744	—72 ½	—0,414 623	0,130 730

20. Cette Table donne d'abord la hauteur du jet $SD = 1,396381$, & l'amplitude de la branche ascendante $AD = 2,043072$. En ajoutant les δy négatifs jusqu'à ce que leur somme égale la hauteur du jet, on trouve que cette somme est trop petite à 70° & trop grande à 75. On auroit le vrai point de chûte par les parties proportionnelles; mais pour plus d'exactitude, je calcule directement l'arc s lorsque $\phi = -74°$; je trouve $s = 4,449103$ & dans l'intervalle de 70 à 74°, j'ai $\delta s = 0,332990$, $\delta y = -0,316692$, $\delta x = 0,102900$. D'où je conclus

l'angle de chûte	- -	74° 8'
l'amplitude de la branche descendante	-	1,153510
l'amplitude totale AB	- -	3,196582.

On trouve en même tems la longueur de la trajectoire $ASB = 4,462834$.

Degré de précision de cette méthode.

21. La méthode précédente ne peut être d'aucun usage dans la pratique, à cause de la longueur des calculs qu'elle exige; mais elle a l'avantage d'être directe & de donner tout de suite une grande approximation. Nous pourrons donc juger du degré de précision des autres méthodes, quand nous aurons fixé celui dont elle est susceptible.

Fig. 3. Soit un arc de cercle AB divisé en un nombre n de parties égales que j'appelle ω; soit $AF = A$ & le rayon $FC = 1$; nous aurons, suivant notre méthode, cette approximation

$$AH = \omega\left(\sin(A + \tfrac{1}{2}\omega) + \sin(A + \tfrac{3}{2}\omega) + \cdots + \sin\left(A + \tfrac{2n-1}{2}\omega\right)\right)$$

$$BH = \omega\left(\cos(A + \tfrac{1}{2}\omega) + \cos(A + \tfrac{3}{2}\omega) + \cdots + \cos\left(A + \tfrac{2n-1}{2}\omega\right)\right)$$

& par la sommation de ces suites on trouve

$$AH = \frac{\tfrac{1}{2}\omega}{\sin\tfrac{1}{2}\omega}\left(\cos A - \cos(A + n\omega)\right)$$

$$BH = \frac{\tfrac{1}{2}\omega}{\sin\tfrac{1}{2}\omega}\left(\sin(A + n\omega) - \sin A\right).$$

D'où il ſuit que l'abſciſſe & l'ordonnée ſont augmentées conſtamment dans le rapport de ſin $\frac{1}{2}\,\omega$ à $\frac{1}{2}\,\omega$, ou qu'elles ſont trop grandes l'une & l'autre de $\frac{1}{6} \cdot \frac{\omega^2}{4}$, *) ω étant un petit arc. Cette augmentation eſt de $\frac{1}{3150}$ lorsque l'arc ω eſt de 5°.

22. Une courbe quelconque pouvant être regardée comme composée de très petits arcs de cercle, on voit qu'une ſemblable augmentation aura lieu dans toutes les courbes diviſées en parties aſſez petites pour que leur courbure ſoit uniforme. On peut même prévoir ce qui arrivera dans celles dont la courbure, ſans être uniforme, ſuivra une loi connue. Ainſi dans notre trajectoire la partie la plus voiſine du point A étant la moins courbe dans la branche aſcendante, l'inclinaiſon moyenne eſt trop petite. Les δy ſont donc trop petits & les δx trop grands. D'où il ſuit que la hauteur du jet 1,396381, qui eſt trop grande d'environ $\frac{1}{3150}$ par la nature de la méthode, eſt trop petite par une autre raiſon qui paroît prépondérante. Ces inégalités ſont difficiles à évaluer; cependant par un examen plus réfléchi nous avons cru devoir porter la hauteur du jet jusqu'à 1,3975. #

23. Quant à l'amplitude 2,043072 de la branche aſcendante, comme elle eſt trop grande par deux raiſons, nous pouvons la diminuer de $\frac{1}{3150}$ & le reſte 2,042423 ſera encore un peu trop grand.

24. Dans la branche deſcendante il y a deux parties à conſidérer, l'une depuis le ſommet jusqu'au point de la plus grande courbure qui répond à 13° 40′ d'inclinaiſon (on le trouve par l'équation $e^{\epsilon} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{h \cos^2 \theta}{\sin \phi \cos^2 \phi}$), l'autre depuis ce point jusqu'au point de chûte. Dans la premiere partie l'inclinaiſon moyenne étant ſuppoſée trop grande, les δy ſont trop grands & les δx trop petits. Au contraire dans le reſte de la courbe les δy ſont trop petits & les δx trop grands. De tout cela il réſulte qu'en fixant la hauteur du jet de 1,3975, on peut diminuer l'amplitude trouvée de $\frac{1}{3150}$

*) Ici & dans la ſuite de ce Mémoire, j'eſtime les erreurs en comparant la différence des deux quantités avec celle des deux qui eſt vraie ou qu'on regarde comme telle. Ainſi le vrai réſultat étant a & celui qui en approche b, l'erreur ſera $\frac{a-b}{a}$.

. la vraie haut. trouvée par la même methode par [illegible] est 1.400652, celle-ci est exacte jusqu'à la 6e décimale; l'autre est trop petite de $\frac{1}{445}$

+ Un calcul exact jusqu'à la 6 [illegible] [illegible] l'amplitude 3.195567 > 3.1911 [illegible] la différence n'est que de $\frac{1}{720}$ [illegible] dans [illegible] qu'on l'annonce ici.

dans toute son étendue, & l'établir de 3,195567; encore est-il probable qu'elle sera un peu trop grande. Cependant plusieurs causes tendent à la diminuer 1° parce que la correction $\frac{1}{3150}$ est trop forte pour le commencement de la courbe, 2° parce qu'il y a une diminution insensible des δx depuis le sommet jusqu'au point de la plus grande courbure, 3° enfin parce que les δy étant moins diminués dans la branche descendante que dans la branche ascendante, l'amplitude de celle-là étant supposée répondre à la même hauteur, doit être un peu trop petite.

Degrés de vîtesse du projectile.

25. Nous avons trouvé ci-dessus la hauteur due à la vîtesse du projectile $z = \frac{h \operatorname{cos}^2 \phi}{\operatorname{cos}^2 \theta} e^{-s}$. J'appelle h' ce qu'elle devient au sommet de la trajectoire, j'aurai

$$h' = \frac{h \operatorname{cos}^2 \theta}{1 + h \operatorname{cos}^2 \theta \left(\frac{\sin \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta} + \mathrm{L} \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)\right)}.$$

Substituant les valeurs numériques, on trouve dans notre exemple $h' = 0{,}400707$.

26. La vîtesse du projectile est la plus petite un peu au delà du sommet au point où l'on a $e^{s} = -\frac{h \operatorname{cos}^2 \theta}{\sin \phi \operatorname{cos}^2 \phi}$, & la hauteur due à cette vîtesse $= -\sin \phi$. Dans notre Exemple le point de la plus petite vîtesse est situé vers 20° d'inclinaison, & la hauteur due à cette vîtesse $= \sin 20^\circ = 0{,}35$. Le point de la plus petite vîtesse est toujours plus loin du sommet que le point de la plus grande courbure.

27. Depuis le point de la plus petite vîtesse jusqu'à l'infini, la vîtesse du corps augmente, mais d'une maniere peu rapide, puisqu'à l'infini la hauteur due à cette vîtesse $= 1$, quels que soient la vîtesse & l'angle de projection. Dans notre exemple le point de chûte répond à environ 74° d'inclinaison. Faisant donc $\phi = -74^\circ$, on trouve $z = 0{,}7703$. Donc la vîtesse de projection est à la vîtesse au point de chûte :: 18 : 5 à peu près.

28. On peut concevoir ainsi le changement de vîtesse dans la branche descendante. Lorsqu'un projectile est chassé horizontalement, comme on l'imagine au sommet de sa trajectoire, sa vîtesse commence par diminuer. Car dans les premiers instans, la gravité quelle qu'elle soit par rapport à la résistance du milieu, ne peut ajouter suffisamment à la vîtesse du corps, puisqu'elle n'agit pas dans sa direction. Si la hauteur dûe à la vîtesse horizontale du corps est plus grande que l'unité, au bout d'un certain tems elle sera réduite à l'unité, & alors la résistance sera égale à la gravité. Mais comme il n'y a qu'une partie de la gravité qui accélere le mouvement du corps, il est clair que la vîtesse doit encore diminuer. Cependant cette diminution doit avoir des limites; car la gravité devenant de plus en plus efficace à mesure que le corps s'approche de son asymptote verticale, & la résistance diminuant avec la vîtesse, il y aura un point où ces deux forces se feront équilibre. Ce point, qui sera celui de la plus petite vîtesse, se déterminera donc par l'équation $g \sin\phi = -gz$, ou $e^s = -\frac{h \cos^2\theta}{\sin\phi \cos^2\phi}$, comme ci-dessus. Passé ce point de la plus petite vîtesse où z sera $-\sin\phi$, & par conséquent plus petit que l'unité, l'action de la pesanteur devenant de plus en plus directe, l'emportera sur la résistance & augmentera la vîtesse jusqu'à ce que la hauteur qui lui est dûe $= 1$. Mais ce n'est qu'à l'infini qu'on obtiendra cette limite. Quelle que soit donc la hauteur dûe à la vîtesse au sommet, elle diminuera jusqu'à un certain point où elle sera plus petite que l'unité, puis elle augmentera jusqu'à l'extrémité infinie de la trajectoire où elle sera égale à l'unité.

29. Je conclurai de là que dans l'hypothese d'un air uniformément dense on ne procureroit pas une vîtesse de chûte fort considérable aux bombes, en les élevant même beaucoup plus haut qu'on ne peut le faire par le moyen de la poudre. Car nous venons de voir que leur vîtesse en tombant seroit dûe à une hauteur moindre que l'unité & par conséquent seroit fort au dessous de la vîtesse initiale. Un très petit angle de projection donneroit alors la vîtesse au point de chûte beaucoup plus grande.

Seconde méthode d'approximation.

30. L'équation $k\,ddp = dp\,ds$ n'étant point intégrable lorsque k eſt conſtant, nous prendrons pour k une quantité variable qui rende l'intégration poſſible & qui ſoit telle pourtant que la denſité $\frac{1}{k}$ n'ait pas d'anomalies trop conſidérables. La formule qui nous a paru propre à remplir cet objet eſt

$$\frac{1}{k} = \frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}.$$

La denſité ſera donc 1 au ſommet; pour qu'elle ſoit la même au point de projection, il faut qu'on ait $\frac{1 + \alpha \operatorname{tang}^2 \theta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 \theta)}} = 1$. Ainſi on prendra $\alpha = \frac{\operatorname{cof} \theta}{1 + \operatorname{cof} \theta}$.

31. D'après cette valeur on voit déjà trois points dans la trajectoire où la denſité $= 1$; le point de projection, le ſommet & le point de la branche deſcendante où l'inclinaiſon eſt θ comme au point de projection. Reſte à ſavoir ſi dans les autres points la denſité ne varie pas d'une maniere trop ſenſible. Or en cherchant le *minimum* de la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}$, on trouve qu'il a lieu lorſque $p^2 = \frac{1 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cof} \theta}{\operatorname{cof} \theta}$, & alors la denſité $= \sqrt{(1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \theta)}$, quantité un peu plus petite que l'unité, mais de maniere que la différence eſt imperceptible à moins que l'angle de projection ne ſoit fort grand; lorſque $\theta = 30^\circ$ cette quantité $= 1 - \frac{1}{400}$, lorſque $\theta = 45^\circ$ elle eſt $1 - \frac{1}{67}$. Enfin en ſuppoſant l'angle de projection même de 60°, le *minimum* de la denſité $= \frac{17}{18}$. D'où l'on peut eſpérer une approximation ſuffiſante.

32. Pour nous arrêter à l'angle de projection de 45°, on voit que la denſité ſuppoſée ſera vraie au ſommet & à 45° d'inclinaiſon de part & d'autre du ſommet. Dans les points intermédiaires la denſité ſera trop petite, mais ſa plus grande diminution n'ira qu'à $\frac{1}{67}$. De là réſulte une légere augmentation dans la portée depuis le point de projection juſqu'au point de la branche deſcendante où l'inclinaiſon eſt de 45°. Depuis ce dernier

point jusqu'au point de chûte la denſité augmente d'une maniere aſſez rapide, puisqu'au point de chûte où l'inclinaiſon eſt d'environ 74°, la denſité eſt $1\frac{2}{3}$. Mais il faut conſidérer 1° que ce n'eſt qu'à l'extrémité de la trajectoire que l'augmentation de denſité eſt ſi ſenſible. 2° que la portion de la branche deſcendante où la denſité eſt trop grande, ne répond qu'à une portion aſſez petite de l'amplitude; c'eſt environ $\frac{1}{6}$ dans cet exemple. 3° que l'effet de cette augmentation eſt de raccourcir la portée qui étoit trop grande dans le reſte de la courbe; d'où réſulte une eſpece de compenſation qui en rectifiant les portées, les laiſſera encore un peu trop grandes.

33. Après nous être aſſurés du degré d'exactitude avec lequel notre formule repréſente la denſité, procédons à l'intégration de l'équation $k\,\mathrm{d}\mathrm{d}p = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$. Elle devient dans cette hypotheſe

$$\mathrm{d}\mathrm{d}p = (1 + \alpha p^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p;$$

on en tire d'abord $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}\alpha p^3 + p - B$; & comme au point de projection $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2h\cos^2\theta}$, on a la conſtante

$$B = \frac{1}{2h\cos^2\theta} + \operatorname{tang}\theta + \frac{\alpha}{3}\operatorname{tang}^3\theta.$$

Maintenant la ſéparation des variables donne $\frac{\alpha}{3}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}p}{\frac{3B}{\alpha} - \frac{3}{\alpha}p - p^3}$.

Soit déterminé c par l'équation cubique

$$\frac{\alpha}{3}c^3 + c - B = 0,$$

& on aura $\frac{\alpha}{3}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}p}{(c-p)\left(p^2 + cp + c^2 + \frac{3}{\alpha}\right)}$. Faiſant donc pour abréger $\sqrt{\left(\frac{3}{4}c^2 + \frac{3}{\alpha}\right)} = m$

on aura l'intégrale

$$(1 + c^2\alpha)\,x = \mathrm{L}\left(\frac{c-p}{c-\operatorname{tang}\theta}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\frac{(p+\frac{1}{2}c)^2 + m^2}{(\operatorname{tang}\theta + \frac{1}{2}c)^2 + m^2}\right) - \frac{\frac{3}{2}c}{m}\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{p+\frac{1}{2}c}{m}\right) + \frac{\frac{3}{2}c}{m}\operatorname{Arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\theta + \frac{1}{2}c}{m}\right)$$

Pour avoir y, on multipliera la valeur de dx par $c - p$, & on aura en intégrant

$$y - cx = \frac{3}{am} \text{ Arc tang } \left(\frac{p + \frac{1}{2}c}{m}\right) - \frac{3}{am} \text{ Arc tang } \left(\frac{\text{tang } \theta + \frac{1}{2}c}{m}\right).$$

34. Pour faciliter le calcul numérique de ces formules, on cherchera deux angles A & P tels que

$$\text{tang } A = \frac{\text{tang } \theta + \frac{1}{2}c}{m}, \text{ tang } P = \frac{p + \frac{1}{2}c}{m}$$

en obſervant que dans la branche deſcendante où p eſt négatif, tang P peut être négatif auſſi. Alors l'angle P ſera négatif & non obtus; car la diminution de l'angle P ſe faiſant ſucceſſivement jusqu'au point où $p = -\frac{1}{2}c$, lorsque p devient plus grand, P augmente auſſi par degrés.

Ces angles étant trouvés, on aura

$$(1 + c^2 \alpha)\, x = \text{L} \left(\frac{c - p}{c - \text{tang } \theta}\right) + \text{L} \left(\frac{\text{cof } P}{\text{cof } A}\right) + \frac{3c}{2m} A - P$$

$$y = cx - \frac{3}{am} (A - P).$$

35. La premiere de ces formules peut être encore ſimplifiée en prenant un nouvel angle ψ tel que

$$\text{tang } \psi = \frac{\frac{3}{2}c}{m}$$

alors elle devient

$$(1 + c^2 \alpha)\, x = \text{L} \left(\frac{\text{fin } (\psi - P)}{\text{fin } (\psi - A)}\right) + \frac{\frac{3}{2}c}{m} (A - P)$$

mais la premiere ſera moins ſujette à erreur lorsque c différera fort peu de tang θ.

36. On obſervera 1° que c doit être calculé avec préciſion par l'équation $\frac{\alpha}{3} c^3 + c - B = 0$, ſurtout lorsqu'il différera fort peu de tang θ. Or ce calcul eſt fort aiſé à faire par les fauſſes poſitions & par la Table des logarithmes. 2° que les logarithmes de nos formules étant toujours hyperboliques, ſi on ſe ſert des logarithmes ordinaires, il faudra multiplier ceux-ci par le nombre 2,3025851 dont le logarithme eſt 0,3622157.

3° que $A - P$ désignant la longueur absolue d'un arc dont le rayon est 1, après avoir évalué cet arc en degrés & parties décimales de degré, il faudra les multiplier par le nombre $\frac{\pi}{180}$, dont le log. est 8,2418774.

EXEMPLE I.

37. On propose de calculer la hauteur du jet & l'amplitude de la branche ascendante, lorsque $h = 10$ & $\theta = 45°$.

Il faudra faire $p = 0$ & procéder au calcul comme il suit

$$\alpha = \frac{\operatorname{cos}\theta}{1 + \operatorname{cos}\theta} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142136, \quad L\alpha = L \operatorname{tang} 22°\tfrac{1}{2}$$
$$= 9{,}6172243$$

$$B = \frac{1}{2h\operatorname{cos}^2\theta} + \operatorname{tang}\theta + \frac{\alpha}{3}\operatorname{tang}^3\theta = 1{,}2380712.$$

Pour trouver c on résoudra l'équation $\frac{\alpha}{3} c^3 + c - B = 0$ par les fausses positions, ce qui donnera très promptement

$$c = 1{,}0692727, \quad Lc = 0{,}0290885.$$

D'où l'on conclura

$$\tfrac{3}{4} c^2 = 0{,}8575082$$
$$\frac{3}{\alpha} = 3(\sqrt{2} + 1) = 7{,}2426407$$
$$\text{Somme } m^2 = 8{,}1001489$$
$$Lm = 0{,}4542465.$$

Je cherche maintenant les angles A & P

$L\frac{1}{2}c$	$= 9{,}7280585$	$L(1 + \frac{1}{2}c)$	$= 0{,}1860055$
Lm	$= 0{,}4542465$	Lm	$= 0{,}4542465$
Reste $L \operatorname{tang} P$	$= 9{,}2738120$	$L \operatorname{tang} A$	$= 9{,}7317590$

$P = 10^\circ\ 38'\ 20'', 56$ $\quad$ $L \cos P = 9,9924695$
$A = 28\ \ 20\ \ 2, \ 58$ $\quad$ $L \cos A = 9,9445792$

$$L \frac{\cos P}{\cos A} = 0,0478903$$
$$L \frac{c}{c-1} = 1,1885264$$
Somme $1,2364167$

Multipliant cette somme par $2,3025851$, le produit sera $2,8469547$. On a ensuite $A - P = 17^\circ 41' 42'' = 17^\circ, 695$. D'où l'on conclura $\frac{\frac{3}{2}c}{m}(A - P) = 0,1740449$. Donc $(1 + c^2 \alpha) x = 3,0209996$. Mais $1 + c^2 \alpha = 1,4735887$; donc enfin $L x = 0,3117744$ &

$$x = 2,050097.$$

C'est l'amplitude de la branche ascendante. Pour avoir y qui est la hauteur du jet, on prendra l'équation $y = cx - \frac{3}{\alpha m}(A - P)$, d'où l'on conclut presque sans calcul

$$y = 1,406192$$

or nous avons trouvé par la premiere méthode $x = 2,042423$, $y = 1,3975$. La différence est de $\frac{1}{270}$ sur l'amplitude, & de $\frac{1}{160}$ sur la hauteur du jet.

38. On devoit bien s'attendre à trouver par cette méthode x & y un peu trop grands, puisque la densité est un peu moindre que dans la vraie trajectoire. Au reste si l'amplitude est plus exacte à proportion de la hauteur du jet, c'est que la densité est vraie dans une étendue sensible au sommet; or les erreurs en cette partie n'influeroient que sur l'amplitude.

/que

EXEMPLE II.

39. Dans la même hypothese on demande l'amplitude totale.

Il faut donc chercher une valeur négative de p qui étant substituée dans nos formules donne $y = o$; c'est à quoi l'on ne peut parvenir que par une espece de tâtonnement. Mais comme on sait que l'angle de chûte est sensiblement au dessus de l'angle de projection, on pourra essayer au

hazard une valeur de p qu'on jugera convenable, & pour peu que la valeur de y qui en résultera soit petite, on en conclura facilement une amplitude plus approchée. Car si après avoir supposé $p = -$ tang θ', il en résulte $x = a$ & $y = \pm \delta$, on aura l'amplitude plus exacte $x = a \pm \delta$ cot θ'.

40. Dans le cas présent nous savons que l'angle de chûte est fort près de $74°$. Prenant donc $p = -$ tang $74°$, on trouve $x = 3,176101$ & $y = + 0,092179$. Ce résultat indique qu'à $74°$ d'inclinaison le mobile est encore au dessus de l'horizontale AB; mais en multipliant y par cot $74°$, & ajoutant le produit à x, on a l'amplitude corrigée

$$x = 3,202531.$$

Par cette correction l'amplitude se trouve un peu trop grande; mais la différence est imperceptible.

41. Nous avons trouvé par la premiere méthode (24) l'amplitude $= 3,195567$; le résultat précédent n'en differe que de $\frac{1}{450}$. C'est donc à juste titre que nous avons annoncé cette seconde méthode comme devant donner une approximation suffisante. Quant au calcul qu'elle exige, il est un peu long: mais on peut employer beaucoup moins de décimales que nous ne l'avons fait. Trois au quatre suffisent, excepté peut-être pour le terme $c -$ tang θ, ou son correspondant sin $(\psi - A)$, qui demande une plus grande précision.

Calcul séparé pour la branche descendante.

42. Les formules que nous venons de trouver donnent la vîtesse trop grande au sommet, parce que la densité est trop petite. De là résulte une erreur particuliere sur la branche descendante, erreur qu'on peut éviter en calculant séparément cette branche.

La hauteur h' dûe à la vîtesse au sommet se détermine exactement par la formule

$$h' = \frac{h \cos^2 \theta}{1 + h \cos^2 \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \mathrm{L} \tang (45° + \tfrac{1}{2}\theta)\right)}$$

Nous pouvons imaginer le corps lancé horizontalement avec une telle vîteſſe, & les formules du n° 33 s'appliqueront ici en faiſant le θ de ces formules $= 0$. Si nous changeons en même tems les ſignes de p & de y, afin que ces quantités ſoient poſitives dans la branche deſcendante, les formules auxiliaires ſeront

$$\frac{\alpha}{3} c^3 + c - \frac{1}{2k} = 0$$

$$\frac{3}{4} c^2 + \frac{3}{\alpha} = m^2$$

$$\text{tang}\, \psi = \frac{\frac{3}{2}c}{m},\ \text{tang}\, A = \frac{\frac{1}{2}c}{m},\ \text{tang}\, P = \frac{p - \frac{1}{2}c}{m}$$

& nous aurons

$$(1 + c^2 \alpha)\, x = \text{L} \left(\frac{\text{ſin}\,(\psi + P)}{\text{ſin}\,(\psi - A)}\right) + \frac{\frac{3}{2}c}{m} (A + P)$$

$$y = - cx + \frac{3}{\alpha m} (A + P).$$

43. Quant aux valeurs des conſtantes, nous obſerverons qu'on peut toujours faire $\alpha = \frac{\text{coſ}\,\theta}{1 + \text{coſ}\,\theta}$, mais θ devient arbitraire. Si on le prend de 45° dans notre exemple, la denſité ſera vraie au ſommet & à 45° d'inclinaiſon. Dans l'intervalle de ces deux points elle eſt trop petite; mais le *minimum* qui répond à 32° 46′ d'inclinaiſon eſt encore de $\frac{66}{67}$. Paſſé 45° juſqu'au point de chûte, la denſité eſt trop grande. On pourroit prendre θ plus grand que 45° & même de 74, afin que la denſité qui eſt toujours exacte au ſommet, le fût encore au point de chûte. Mais dans l'intervalle de ces deux points elle ſeroit ſenſiblement trop petite, ſon *minimum* étant 0,8231. Il vaut donc mieux s'en tenir à l'angle de 45° dans notre exemple, afin que la premiere partie de la courbe depuis 0° juſqu'à 45° d'inclinaiſon ſoit déjà fort près de la vraie trajectoire, & que la ſeconde partie où il n'eſt pas néceſſaire que la denſité ſoit ſi exacte, ſerve à corriger l'erreur de la premiere. Le calcul ſuivant prouve qu'en prenant θ plus grand que 45°, l'am-

l'amplitude seroit plus approchée, mais il est difficile de fixer au juste la valeur de θ qui produiroit une exacte compensation dans les erreurs.

Exemple I.

44. Supposant pour la branche descendante de notre trajectoire $\alpha = \frac{\cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \sqrt{2} - 1$ comme pour la branche ascendante, & calculant h' comme il vient d'être dit, on aura $\frac{1}{2h'} = 1{,}2477936$, ce qui differe un peu de $1{,}238$ &c. valeur de B dans la branche ascendante. La valeur de c & celle de m seront donc un peu différentes; on trouvera $c = 1{,}0758574$, $Lm = 0{,}4545303$. Maintenant si l'on suppose $p =$ tang 74°, on trouvera $x = 1{,}1212377$, $y = 1{,}310352$. Mais la hauteur du jet a été trouvée $1{,}406192$; corrigeant donc l'amplitude de la branche descendante, on aura

$$x = 1{,}148719$$

& de là l'amplitude totale $3{,}198816$, qui ne differe plus que de $\frac{1}{1000}$ de celle qui a été trouvée par la premiere méthode.

Exemple II.

45. Si l'on veut faire en sorte que la densité soit vraie au point de chûte, il faudra prendre $\alpha = \frac{\cos 74^\circ}{1 + \cos 74^\circ}$, & on trouvera l'amplitude de la branche descendante $x = 1{,}175246$; quantité trop grande puisque la densité est trop petite. Cependant l'erreur n'est pas fort considérable; elle n'est guere que de $\frac{1}{50}$. Ce qui prouve qu'en changeant un peu la valeur de α, l'amplitude n'en est pas sensiblement altérée.

46. Remarquez que dans le calcul de la branche descendante on pourroit s'épargner la résolution de l'équation cubique $\frac{\alpha}{3}c^3 + c - \frac{1}{2h'} = 0$. Car après avoir vu quelle est à peu près la valeur qu'il convient de donner à α, qu'on calcule aussi grossierement la valeur de c. C'est à c qu'on donnera une valeur en nombres ronds, & on en déduira la valeur de α par

D

l'équation $\frac{\alpha}{3}c^2 = \frac{1}{2h'} - c$. Car nous venons de voir qu'il nous eſt permis d'altérer un peu la valeur de α; or nous l'altérons de maniere que c ſe trouve exactement, ce qui ne peut manquer de ſimplifier le calcul.

Troiſieme méthode d'approximation.

47. Il paroît difficile de trouver des formules qui ſans être trop compliquées, repréſentent la trajectoire en entier avec plus d'exactitude que celles de la méthode précédente. Mais ſi on veut calculer ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante, on pourra y parvenir par des formules plus ſimples & à peu près auſſi exactes.

Calcul de la branche aſcendante.

48. Nous avons vu ci-deſſus (13) que la denſité néceſſaire pour décrire l'hyperbole, étoit $\frac{V(1 - \alpha p)}{V(1 + pp)}$. Cette formule, qui réuſſit aſſez bien pour la branche deſcendante, nous a donné l'idée de ſuppoſer pour la branche aſcendante $\frac{1}{k} = \frac{1}{V(1 - \alpha p)} \cdot \frac{1}{V(1 + pp)}$. Il en réſulte l'équation facilement intégrable

$$\frac{ddp}{dx} = \frac{dp}{V(1 - \alpha p)}.$$

Mais avant d'aller plus loin, il eſt néceſſaire de déterminer α & de voir quel degré de préciſion on doit attendre de cette nouvelle méthode.

49. La denſité au point de projection devant être la même qu'au ſommet, on fera $1 = (1 - \alpha \tang \theta)(1 + \tang^2 \theta)$, ce qui donnera

$$\alpha = \sin\theta \cos\theta;$$

α étant connu, ſi on cherche le *minimum* de la formule $(1 - \alpha p)(1 + pp)$, on trouvera qu'il a lieu lorſque $p = \frac{1 \pm V(1 - 3 \sin^2\theta \cos^2\theta)}{3 \sin\theta \cos\theta}$. Lorsque $\theta = 45°$, cette formule donne $p = 1$, & $p = \frac{1}{3}$. La pre-

miere valeur $p = 1$ indique qu'au point de projection la densité est à son *minimum*; elle reste donc la même dans une étendue sensible, ce qui procurera une grande approximation, surtout pour la hauteur du jet. L'autre valeur $p = \frac{1}{3}$ donne le *maximum* de la densité $1\frac{1}{25}$. Si θ est plus petit que 45°, il n'y a qu'une valeur de p qui sera utile, savoir $p = \frac{1 - V(1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{3 \sin \theta \cos \theta}$; elle indiquera un *maximum*. Lorsque $\theta = 30°$, ce *maximum* $= 1\frac{1}{38}$, & ainsi de moins en moins à mesure que l'angle de projection est plus petit.

Enfin lorsque θ est plus grand que 45°, par exemple, lorsque $\theta = 60°$, les deux valeurs de p peuvent servir, savoir $p = \frac{4 + V7}{3V3}$, $p = \frac{4 - V7}{3V3}$. La premiere fait voir que vers 52° d'inclinaison la densité est trop petite de $\frac{1}{13}$, & qu'à $14° \frac{1}{2}$ elle est trop grande de $\frac{1}{38}$. Entre ces deux points il y en a un où la densité est juste: c'est lorsque $p = \cot \theta$, ou lorsque l'inclinaison est de 30°.

50. De là il résulte que jusqu'à 45° & un peu au delà les portées seront trop petites ainsi que les hauteurs des jets; mais l'angle de projection devenant plus grand, ces quantités seront un peu trop grandes. On obtiendroit un degré d'approximation de plus en faisant coïncider la densité au point de projection avec la densité à une petite distance du sommet; il faudroit alors prendre pour $\frac{1}{k}$ la formule $\frac{1}{V(\beta - \alpha p)} \cdot \frac{1}{V(1 + pp)}$.

51. Si on integre maintenant l'équation $\frac{ddp}{dx} = \frac{dp}{V(1 - \alpha p)}$, on aura $\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{dp}{dx} = C - V(1 - \alpha p)$, & par la valeur initiale de $\frac{dp}{dx}$ on trouve

$$C = \cos \theta - \frac{\tang \theta}{4h}.$$

Soit maintenant $V(1 - \alpha p) = z$, on aura $dx = \frac{z\,dz}{z - C}$, & en intégrant

$$x = z - \cos \theta + C\,L\left(\frac{z - C}{\cos \theta - C}\right).$$

On trouve de même

$$(1 - C^2)\, x - ay = \tfrac{1}{3}\,(z^3 - \text{cof}^3\,\theta) + \tfrac{1}{2}\, C\,(z^2 - \text{cof}^2\,\theta).$$

J'appelle X l'amplitude de la branche afcendante & Y la hauteur du jet, j'aurai par ces formules

$$X = 1 - \text{cof}\,\theta + C\,L\left(\frac{1 - C}{\text{cof}\,\theta - C}\right)$$

$$Y = \frac{1 - C^2}{a}\, X - \frac{C}{2}\,\text{tang}\,\theta - \frac{1}{3a}\,(1 - \text{cof}^3\,\theta).$$

EXEMPLE.

52. Nous fuppoferons toujours $h = 10$ & $\theta = 45°$. Donc $a = \frac{1}{2}$ & $C = 0{,}6821068$. D'où l'on tire

$X = 2{,}027381$

$Y = 1{,}396186.$

On fera fans doute étonné de voir avec quelle précifion cette méthode nous donne la hauteur du jet que nous avions trouvée d'abord de 1,396381, & qui doit être tout au plus de 1,3975. C'eft que la denfité eft exacte dans une étendue fenfible au commencement de la courbe, ou dans la partie qui influe le plus fur la hauteur. Quant à l'amplitude X, on voit qu'elle eft un peu trop petite, puifque nous l'avons trouvée ci-deffus de 2,042423. Mais la différence n'eft gueres que de $\frac{1}{140}$. On peut fe rendre raifon de cette différence en confidérant que notre formule fuppofe la réfiftance vers le fommet un peu trop grande; or ce furcroît de réfiftance influe tout entier fur la valeur de X.

53. Par ce feul exemple on voit que cette méthode eft fufceptible du même degré de précifion que l'autre, & que les calculs en font beaucoup moins compliqués. Paffons donc au calcul de la branche defcendante; elle offrira plus de difficultés, parce que l'angle Φ y varie davantage.

Calcul de la branche defcendante.

54. J'obferve d'abord que la feconde méthode, quelque compliquée qu'elle foit, a un avantage réel dans le calcul de la branche defcendante;

c'eſt qu'on peut ſuppoſer la denſité vraie au ſommet & au point de chûte, ſans qu'elle ſoit fort loin de la vérité dans les points intermédiaires. Mais comme il s'agit principalement de ſimplifier les calculs, quand même on perdroit quelque choſe du côté de l'exactitude, nous prendrons une formule plus ſimple pour repréſenter la denſité.

55. Nous ſuppoſerons avec M. le Chevalier de Borda $\frac{1}{k} = \frac{1 + \alpha p}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Cette formule $= 1$ au ſommet; pour qu'elle ſoit encore 1 au point de la branche deſcendante où l'inclinaiſon eſt ζ, il faut prendre $\alpha = \text{tang}\,\frac{1}{2}\zeta$. Dans tout l'intervalle depuis $p = 0$ juſqu'à $p = \text{tang}\,\zeta$, la denſité ſera trop grande, & ſon *maximum* ſera $\frac{1}{\text{cof}\,\frac{1}{2}\zeta}$ lorſque $p = \text{tang}\,\frac{1}{2}\zeta$. M. le Chevalier de Borda prend ζ égal à l'angle de chûte; mais il eſt clair qu'alors la denſité eſt ſenſiblement trop grande dans toute la trajectoire, ſurtout lorſque l'angle de chûte eſt un peu grand. Ainſi dans notre exemple où l'angle de chûte eſt d'environ 74°, le *maximum* de la denſité ſeroit $\frac{1}{\text{cof}\,37^\circ}$ ou $1\frac{1}{4}$, ce qui rendroit l'amplitude ſenſiblement trop petite. Il vaut donc mieux prendre ζ beaucoup plus petit que l'angle de chûte; il en réſultera deux avantages 1° que la denſité variera beaucoup moins depuis $p = 0$ juſqu'à $p = \text{tang}\,\zeta$; 2° que la denſité étant trop petite depuis $p = \text{tang}\,\zeta$ juſqu'au point de chûte, cette partie de la trajectoire pourra ſervir à corriger la premiere. On ne peut pas dire au juſte quelle doit être la valeur de ζ pour que les erreurs des deux parties de la courbe ſe compenſent parfaitement; mais le calcul nous a fait voir qu'il falloit prendre ζ un peu moindre que l'angle de projection θ. Ainſi dans notre exemple, ζ doit être un peu moindre que 45°, ce qui eſt fort loin, comme on voit, de 74.

56. La quantité α étant donc priſe d'une maniere convenable ſuivant les différens cas, on aura $\frac{ddp}{dx} = (1 + \alpha p)\,dp$, dont l'intégrale eſt $\frac{dp}{dx} = \frac{(1 + \alpha p)^2 - C^2}{2\alpha}$. Si nous appellons toujours h' la hauteur dûe à la

viteſſe au ſommet, nous aurons $C^2 = 1 - \frac{\alpha}{h'}$. Faiſant enſuite $1 + \alpha p = z$ & intégrant, on trouve

$$Cx = L\left(\frac{z - C}{z + C}\right) + L\left(\frac{1 + C}{1 - C}\right),$$

$$x(1 - C) + \alpha y = 2 L\left(\frac{z + C}{1 + C}\right).$$

57. Pour faciliter le calcul de ces formules, on verra d'abord quelle valeur il convient de donner à α; on fera groſſierement $\frac{\alpha}{h'} = \sin^2 \lambda$, d'où réſulte $C = \cos \lambda$. Connoiſſant ainſi à peu près la valeur de C, on prendra pour C les deux ou trois premieres figures de $\cos \lambda$; on en conclura auſſitôt $\alpha = h'(1 - C)(1 + C)$. De cette maniere C aura toujours une valeur exacte & commode; on donnera à z ou $1 + \alpha p$ la valeur qui convient à peu près à l'angle de chûte. La premiere équation donnera la valeur de x & la ſeconde celle de y. Si celle-ci cadre avec la hauteur du jet connue par la branche aſcendante, x ſera l'amplitude de la branche deſcendante; ſi non, l'erreur & l'angle de chûte ou une nouvelle ſuppoſition ſerviront à trouver la vraie amplitude.

58. On peut éliminer z des deux équations précédentes, & l'équation de la trajectoire devient

$$x + \alpha y = -2 L\left(\frac{1 + C}{2C}\, e^{-\frac{Cx}{2}} - \left(\frac{1 - C}{2C}\right) e^{\frac{Cx}{2}}\right).$$

Mais en faiſant $\frac{1 - C}{2C} = \beta$, la forme ſuivante paroît plus commode pour le calcul

$$Cx + \frac{\alpha y}{2\beta} = -\frac{1}{\beta} L\left(1 + \beta - \beta e^{Cx}\right).$$

On connoîtra dans cette équation $\frac{\alpha y}{2\beta}$ & β, & on pourra regarder Cx comme l'inconnue.

59. Ces formules doivent être miſes ſous une autre forme ſi $\frac{\alpha}{h'}$ n'eſt pas plus petit que l'unité. D'abord ſi $\frac{\alpha}{h'} = 1$, ce qu'on pourra ſuppo-

ser dans bien des cas, puisque α n'eſt déterminé qu'à peu près; l'équation devient

$$x + h'y = -2\,L\,(1 - \tfrac{1}{2}x)$$

& la ſolution en ſera extrêmement facile.

60. Si α eſt plus grand que h', on fera $\frac{\alpha}{h'} = 1 + b^2$, ou plutôt faiſant groſſierement $\frac{h'}{\alpha} = \operatorname{cof}^2\psi$, ce qui donneroit $b = \operatorname{tang}\psi$, on prendra pour b les deux ou trois premiers chiffres de cette tangente. D'où l'on déduit réciproquement $\alpha = h'(1 + b^2)$. Cela poſé l'équation de la trajectoire deviendra en éliminant encore z,

$$x + \alpha y = -2\,L\left(\operatorname{cof}\frac{bx}{2} - \frac{1}{b}\operatorname{fin}\frac{bx}{2}\right).$$

En prenant exactement $\operatorname{tang} M = b$, le ſecond membre de cette équation ſe réduiroit à $-2\,L\left(\frac{\operatorname{fin}(M - \frac{1}{2}bx)}{\operatorname{fin} M}\right)$.

Exemple.

61. Soit propoſé de calculer l'amplitude de la branche deſcendante, en ſuppoſant la hauteur du jet $y = 1{,}396186$ & la viteſſe au ſommet dûe à la hauteur $h' = 0{,}4007072$.

On pourra ſuppoſer comme ci-deſſus (44) la denſité exacte à 45° d'inclinaiſon, ce qui donnera de même $\alpha = \sqrt{2} - 1$ & $Lb = 9{,}2638539$. Je conſerve ces valeurs pour mieux comparer la méthode actuelle avec celle de l'art. cité: autrement je prendrois $b = 0{,}184$, puis $\alpha = h'(1 + bb)$.

D'après ces valeurs je trouve l'amplitude de la branche deſcendante

$$x = 1{,}147025$$

ce qui cadre fort bien avec le réſultat de l'art. cité qui eſt 1,148719, l'un & l'autre différant fort peu de la vraie amplitude 1,15314. Ces réſultats ſe rapprocheroient encore davantage s'ils étoient calculés ſur une même valeur de y.

62. La valeur que nous avons donnée à α suppose que la densité est juste à 45°. A $22^\circ\frac{1}{2}$ elle est trop grande de $\frac{1}{12}$, & depuis 45° jusqu'au point de chûte, elle est trop petite. Cette seconde partie de la courbe ne suffit pas pour compenser l'erreur de la premiere, puisque l'amplitude est encore trop petite. D'où il suit que notre résultat eût été plus exact en prenant α un peu plus petit que tang $(22^\circ\frac{1}{2})$. C'est ce que nous avons avancé (55).

63. Si dans cet exemple on eût pris $\alpha =$ tang 37°, afin que la densité fût exacte au point de chûte, on auroit trouvé l'amplitude de la branche descendante $x = 1{,}10577$, qui differe de $\frac{1}{24}$ de la vraie amplitude. On conçoit qu'il doit y avoir dans ce cas une erreur sensible, puisque du sommet au point de chûte la densité est constamment trop grande, son *maximum* étant $\frac{5}{4}$. Il faut donc nécessairement prendre α plus petit que M. le Chevalier de Borda ne l'indique.

De quelques cas où l'on peut simplifier le calcul de la branche descendante.

64. Dans la trajectoire hyperbolique dont nous avons parlé ci-dessus, considérons particulierement la branche descendante SMB. Après avoir
Fig. 6. mené par le sommet S l'horizontale SO, faisons $SP = x$, $PM = y$, l'angle des deux asymptotes $= \zeta$, la distance $SO = b$, l'équation de l'hyperbole sera

$$y \text{ tang } \zeta = \frac{xx}{b - x}.$$

Nous avons déjà vu que cette courbe seroit la vraie trajectoire, en supposant la densité du milieu $= \frac{3}{b} \cdot \frac{V(1 + p \text{ tang } \zeta)}{V(1 + pp)}$. Or il peut se faire que cette quantité ne varie pas beaucoup dans une certaine étendue de la branche SMB.

65. L'équation précédente étant différentiée donne $1 + p \text{ tang } \zeta = \left(\frac{b}{b - x}\right)^2$. Mais on doit avoir au sommet $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2h'}$ & la densité $= 1$.

Donc

Donc $b = 3$ & tang $\zeta = \frac{4h'}{3}$. D'où l'on voit que les quantités b & ζ sont absolument déterminées, & que l'hyperbole ne représentera assez bien la trajectoire que lorsque la densité $\frac{V(1 + p \text{ tang } \zeta)}{V(1 + pp)}$ sera peu variable.

66. La densité est vraie lorsque l'inclinaison est ζ, ou lorsque $p =$ tang ζ. Depuis le sommet jusqu'à ce point la densité est trop grande, & son *maximum*, lorsque $p =$ tang $\frac{1}{2}\zeta$, est $V\left(\frac{1 + \text{cos}\,\zeta}{2\,\text{cos}\,\zeta}\right)$. Depuis le point où l'inclinaison est ζ jusqu'à l'infini, la densité est trop petite. C'est au calculateur à voir dans les différens cas si la valeur de ζ est telle, relativement à l'angle de chûte, qu'il puisse espérer une compensation suffisante entre les erreurs. Si cela est, on pourra calculer l'amplitude plus simplement que par aucune autre méthode, en résolvant l'équation

$$\frac{4h'}{3}\,y = \frac{xx}{3 - x}$$

dans laquelle on mettra pour y la hauteur du jet trouvée par la branche ascendante.

EXEMPLE.

67. Soit, comme ci-dessus, $h' = 0{,}4007072$, on aura L tang $\zeta = 9{,}7277659$, & $\zeta = 28°\ 7'$. C'est donc à $28°\ 7'$ d'inclinaison que la densité sera vraie. A $14°\ 3'$ le *maximum* de la densité $= 1\frac{1}{30}$. Mais depuis le point de $28°\ 7'$ jusqu'au point de chûte la densité diminue continuellement, d'où il est à présumer que l'amplitude sera trop grande. Aussi en prenant $y = 1{,}396186$, comme nous l'avons trouvé par la branche ascendante (52), & résolvant l'équation

$$\frac{xx}{3 - x} = y \text{ tang } \zeta = 0{,}7459486$$

on trouve $x = 1{,}168763$; résultat un peu trop grand, mais qui approche beaucoup de la vraie amplitude $1{,}15314$. Si on ajoute cette valeur de x avec l'amplitude de la branche ascendante trouvée (52), on aura par cette méthode mixte l'amplitude totale

3,196144

plus approchée de la vraie amplitude 3,195567 que tout ce que nous avons trouvé jusqu'à préfent. Il y a fans doute un peu de hazard dans cette approximation; nous favions cependant que l'amplitude de la branche afcendante étoit trop petite, que l'autre étoit trop grande; d'où il étoit naturel de conclure qu'en les ajoutant les erreurs fe détruiroient en partie. Dans d'autres cas on pourra réuffir tout auffi complétement.

68. L'hyperbole ordinaire ne fatisfaifant à la queftion que dans un certain nombre de cas particuliers, confidérons une hyperbole quelconque repréfentée par l'équation

$$y \text{ tang } \zeta = \frac{b^{n+1}}{n(b-x)^n} - \frac{b}{n} - x.$$

La denfité néceffaire pour la décrire fera $\frac{n+2}{b} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{(1 + p \text{ tang } \zeta)}}{\sqrt{(1+pp)}}$, & comme on doit avoir au fommet $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2h'}$ & la denfité $= 1$, on fera

$$b = n + 2$$

$$\text{tang } \zeta = \frac{n+1}{n+2} \cdot 2h'.$$

Il faudra donc examiner fi on peut donner à n une valeur telle que $\frac{\sqrt[n+1]{(1 + p \text{ tang } \zeta)}}{\sqrt{(1+pp)}}$ ne foit pas trop variable depuis le fommet jufqu'au point de chûte. Si cela eft, on mettra pour y la hauteur du jet, & on réfoudra par les fauffes pofitions l'équation

$$y \text{ tang } \zeta = \frac{b^{n+1}}{n(b-x)^n} - \frac{b}{n} - x.$$

69. Si l'on fuppofe n infini, la denfité devient $\frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$, & l'équation précédente fe change en celle-ci

$$x + 2h'y = e^x - 1$$

équation à la logarithmique qui eft par conféquent une limite des hyperboles de tous les genres. La denfité fera conftamment trop petite dans cette

courbe, & par conſéquent l'amplitude trop grande. Néanmoins ſi l'angle de chûte n'eſt pas fort grand, on voit que la denſité ſera ſenſiblement conſtante, ſurtout vers le ſommet, ce qui donnera l'amplitude aſſez exactement.

70. Dans notre exemple l'angle de chûte étant de 74°, la formule précédente ſeroit trop défectueuſe. Auſſi en faiſant $y = 1{,}396186$, & $h' = 0{,}400707$, on trouve $x = 1{,}199485$, réſultat trop grand, mais qui n'eſt cependant pas fort loin de la vraie amplitude 1,15314.

71. Si l'on ſuppoſe n plus grand que l'unité, on conçoit qu'on aura des réſultats moyens entre celui de l'hyperbole ordinaire, & celui de la logarithmique. Ainſi en faiſant $n = 2$, on trouve dans notre exemple $x = 1{,}1775$.

72. Si l'on ſuppoſe n plus petit que l'unité, mais poſitif, l'amplitude diminuera à meſure que n ſera plus petit. Ainſi dans notre exemple où l'hyperbole ordinaire donne un réſultat trop grand, parmi les valeurs fractionnaires de n il y en aura une qui donnera le vrai réſultat. Soit $n = \frac{1}{2}$, on trouve $x = 1{,}16127$, qui ſe rapproche de la vraie amplitude. Soit $n = \frac{1}{10}$, on trouve x — 1,1518 qui ne diffère preſque plus de la ~~viteſſe~~, & qui paroit s'en écarter dans un autre ſens. Il y auroit d'autres vérité cas où en diminuant n même à l'infini, on ne feroit qu'approcher du vrai réſultat, ſans y tomber juſte.

73. Enfin ſi l'on fait n infiniment petit, l'équation de l'hyperbole devient

$$x + h'y = -2\,L\,(1 - \tfrac{1}{2}\,x)$$

autre eſpece de logarithmique qui eſt la ſeconde limite des hyperboles de tous les genres. La denſité néceſſaire pour la décrire eſt $\frac{1 + h'p}{V(1 + pp)}$; auſſi retombe-t-elle préciſément avec celle que nous avons trouvée (59). L'amplitude qui en réſulte dans notre exemple eſt 1,148615. Elle ſe trouve un peu plus juſte que celle du n°. 61 par les raiſons que nous avons déjà alléguées (62).

Équation de la trajectoire lorsque l'angle de projection est petit.

74. Les méthodes précédentes, surtout la seconde, approchent d'autant plus de la vérité que l'angle de projection est plus petit. Mais comme cette supposition ne les simplifie pas, je donnerai d'autres formules suffisamment approchées, & plus faciles à calculer. Pour cela je prendrai la densité $= \frac{1}{\cos\theta\, V\,(1 + pp)}$, quantité qui variera fort peu si p reste toujours assez petit. On aura donc $\frac{ddp}{dx} = \frac{dp}{\cos\theta}$, d'où résulte $p = \tang\theta - \frac{1}{2\,h\cos\theta}\left(e^{\frac{x}{\cos\theta}} - 1\right)$, &

$$y = \left(\tang\theta + \frac{1}{2\,h\cos\theta}\right)x - \frac{1}{2h}\left(e^{\frac{x}{\cos\theta}} - 1\right).$$

75. Si on nomme X l'amplitude de la branche ascendante & Y la hauteur du jet, on aura

$$X = \cos\theta\ \mathrm{L}\,(1 + 2\,h\sin\theta)$$
$$Y = (1 + 2\,h\sin\theta)\frac{X}{2\,h\cos\theta} - \sin\theta.$$

On trouvera l'amplitude totale en faisant $y = 0$ & résolvant l'équation

$$(1 + 2\,h\sin\theta)\frac{x}{\cos\theta} = e^{\frac{x}{\cos\theta}} - 1.$$

76. Ces formules sont fort simples, mais pour se procurer une plus grande exactitude lorsque l'angle de projection ne sera pas si petit, il sera bon de calculer séparément la branche descendante. On cherchera donc la hauteur dûe à la vîtesse au sommet par la formule ordinaire $\frac{1}{h'} = \frac{1}{h\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \mathrm{L}\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)$, & on résoudra l'équation

$$1 + 2\,h'y = e^x - x$$

dans laquelle on mettra pour y la hauteur du jet trouvée par la branche ascendante. Cette équation est déduite de la formule générale (74) en faisant

$\theta = 0$ & changeant le ſigne de y. D'ailleurs elle s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée (69) pour la limite des hyperboles.

77. Quant au degré de préciſion de ces formules, il ſera d'autant plus grand que l'angle de projection ſera plus petit. Dans la branche aſcendante, la denſité croîtra depuis le point de projection où elle eſt 1, jusqu'au ſommet où elle eſt $\frac{1}{\operatorname{coſ}\theta}$. Ainſi l'amplitude de cette branche & la hauteur du jet ſeront trop petites. Si on calcule tout d'un coup l'amplitude totale, la branche deſcendante ſe trouvera affectée de deux erreurs; 1° parce que la vîteſſe au ſommet eſt trop petite, 2° parce que la denſité eſt trop grande depuis le ſommet jusqu'au point où l'inclinaiſon eſt θ comme au point de projection. Elle diminue à la vérité dans le reſte de la branche deſcendante, mais pas aſſez pour procurer une exacte compenſation. Cette méthode donnera donc les portées trop courtes; mais en calculant ſéparément la branche deſcendante, on rectifie la vîteſſe au ſommet & comme en même tems la denſité devient trop petite dans toute la branche deſcendante, l'amplitude en eſt augmentée, ce qui pourra corriger l'erreur de la branche aſcendante. On voit par ces raiſons, que pour obtenir une grande approximation de ces nouvelles formules, il ne faut pas ſuppoſer l'angle de projection plus grand que 15 ou 20°, & il faut avoir ſoin de calculer ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante.

Exemple I.

78. Pour voir cependant quelle ſeroit l'erreur de cette méthode, ſi on l'appliquoit à de plus grands angles de projection, nous prendrons, comme à l'ordinaire $h = 1{\cdot}0$ & $\theta = 45°$. On aura l'amplitude totale en réſolvant l'équation

$$(1 + 10\sqrt{2})\,x\sqrt{2} = e^{x\sqrt{2}} - 1$$

qui donne $x = 2{,}94043$. Or la vraie amplitude eſt $3{,}195567$. Ainſi cette méthode donne la portée trop courte d'environ $\frac{1}{12}$. Mais ſi nous calculons ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante, nous aurons une plus grande approximation. L'amplitude de la branche

ascendante sera $1,92155$, & la hauteur du jet $1,35032$; quantités trop petites l'une & l'autre; cependant la hauteur du jet ne differe de la vérité que d'environ $\frac{1}{30}$. On trouvera toujours par ce moyen la hauteur du jet plus approchée que l'amplitude de la branche ascendante, parce que la densité n'est sensiblement défectueuse que vers le sommet, ce qui influe peu sur la hauteur du jet. Pour avoir maintenant l'amplitude de la branche descendante, on résoudra l'équation

$$2h'y + 1 = e^x - x$$

dans laquelle $h' = 0,400707$ & $y = 1,35032$. On aura donc $x = 1,18346$, & l'amplitude totale $= 3,10501$, qui n'est pas fort éloignée de la vraie amplitude $3,195567$. Elle est encore trop petite d'environ $\frac{1}{24}$. Nous obtenons par ce moyen l'amplitude & la hauteur du jet avec une approximation presqu'égale & qui suffiroit dans bien des cas.

EXEMPLE II.

79. Si la méthode précédente n'éloigne pas beaucoup de la vérité lorsque l'angle de projection est de $45°$, elle doit être infiniment plus approchée lorsque l'angle de projection est petit. Pour nous en assurer plus positivement, nous supposerons $h = 10$ & $\theta = 10°$. On trouvera d'abord l'amplitude de la branche ascendante $X = 1,475293$, & la hauteur du jet $Y = 0,161389$. L'amplitude totale se trouvera directement en résolvant l'équation $(1 + 20 \sin 10°) \frac{x}{\cos 10°} = e^{\frac{x}{\cos 10°}} - 1$, d'où résulte $\frac{x}{\cos 10°} = 2,499989$, & $x = 2,462002$. Nous savons d'avance que ces résultats sont trop petits, il faut voir de combien ils le sont.

80. Je calcule ces quantités par la troisieme méthode, & je trouve $X = 1,478037$, $Y = 0,161560$. Il n'y a donc que $\frac{1}{500}$ de différence sur l'amplitude & $\frac{1}{1000}$ sur le hauteur. L'erreur doit être un peu plus grande, parce que la méthode troisieme suppose aussi la résistance un peu trop grande. Mais le *maximum* de la densité n'étant que $1\frac{1}{270}$, on

voit que le point de comparaiſon dont nous nous ſommes ſervis, ne peut pas être ſenſiblement éloigné de la vérité.

81. Pour vérifier l'amplitude totale, je calcule ſéparément la branche deſcendante en réſolvant l'équation $2\,h'y + 1 = e^x - x$, dans laquelle $h' = 2{,}1854$ & $y = 0{,}161560$. Je trouve $x = 0{,}992896$, quantité qui doit être un peu trop grande. Ajoutant l'amplitude de la branche aſcendante 1,478037 qui eſt un peu trop petite, j'en conclus l'amplitude totale 2,470933 qui doit être fort approchée. Mais en ſe ſervant de la méthode III n°. 58, on trouve $x = 0{,}991577$, d'où réſulte l'amplitude plus exacte 2,469614.

82. Donc ſi on calcule directement l'amplitude du jet par la méthode du n°. 75, on trouve le réſultat 2,462002 trop petit de $\frac{1}{340}$. Si en ſuivant la même méthode, on calcule ſéparément la branche deſcendante, l'amplitude qui en réſulte 2,467750 eſt trop petite de $\frac{1}{1300}$ ſeulement. Quant à la hauteur du jet 0,161389, elle eſt trop petite auſſi d'environ $\frac{1}{1000}$.

Calcul des Tables.

83. C'eſt d'après ces différentes méthodes que nous avons calculé les Tables qu'on trouvera à la fin de ce Mémoire. Nous aurions bien déſiré les rendre plus complettes, en ajoutant le tems de mouvement, l'angle de chûte, & ſurtout la quantité dont l'amplitude augmente lorſque la denſité diminue. Mais ces différens objets exigeant un travail immenſe, & le tems preſcrit par l'Académie étant près d'expirer, nous n'avons pu l'entreprendre.

Si on examine les différences de nos réſultats, on trouvera qu'elles n'ont point l'uniformité qu'elles devroient avoir, ſi tous les calculs étoient faits ſur une même formule. C'eſt que nous nous ſommes ſervis de différentes méthodes ſuivant les différens cas. En général, l'amplitude & la hauteur du jet ſont exactes à moins de $\frac{1}{400}$, ſouvent à moins de $\frac{1}{1000}$. Les hauteurs des jets ſont trop petites jusqu'à environ 45°; il en eſt de même des amplitudes de la branche aſcendante: mais l'amplitude totale eſt tantôt

trop grande, tantôt trop petite, ce qui occasionne des irrégularités dans les différences sans que le calcul en soit moins juste.

84. Nous aurions pu sans beaucoup de peine augmenter considérablement le volume de ces Tables, en les interpolant de degrés en degrés, & de dixiemes en dixiemes pour les valeurs de h. Mais ce travail n'en auroit pas eu plus de mérite. Nous avons mieux aimé présenter ces résultats, tels que nous les avons trouvés, indépendamment les-uns des autres. D'ailleurs ces Tables ne sont encore qu'une pure spéculation, jusqu'à ce que l'expérience nous apprenne si la résistance est simplement proportionnelle au quarré de la vîtesse, ou si elle renferme d'autres termes dont nous n'avons pas tenu compte. Mais quand même notre hypothese seroit conforme à l'expérience, il faudroit toujours avoir égard à la diminution de densité dans la partie supérieure de la trajectoire, diminution qui est très sensible dans plusieurs cas de la Balistique.

Comparaison des méthodes précédentes avec celles de M. M. le Chevalier de Borda & Bézout.

85. Nous avons déjà vû (55 & suiv.), en adoptant la méthode de M. le Chev. de Borda par la branche descendante, que cette méthode donnoit l'amplitude avec une exactitude suffisante, pourvû qu'on prît α autrement que ce savant géomètre. Car en prenant α de maniere à faire coïncider les densités extrêmes, il en résulte dans exemple $\frac{1}{24}$ d'erreur sur l'amplitude (63); erreur qu'on peut diminuer considérablement en attribuant à α la valeur convenable. Quant à la méthode de M. le Chev. de Borda pour la branche ascendante, elle suppose la densité représentée semblablement par $\frac{1 + \alpha p}{\sqrt{(1 + pp)}}$. On peut voir les formules de l'Auteur dans les Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris pour l'an. 1769; il suffira d'en présenter le résultat dans notre exemple. Lors donc que $h = 10$ & $\theta = 45°$, on trouve par cette méthode l'amplitude de la branche ascendante $X = 1,998064$, & la hauteur du jet $Y = 1,381746$. Or les vraies valeurs

leurs de quantités, du moins celles que nous savons être très proches des véritables, sont $X = 2{,}042423$, $Y = 1{,}3975$. Il y a donc environ $\frac{1}{45}$ d'erreur sur l'amplitude & $\frac{1}{90}$ sur la hauteur; d'où il résulte que ces formules approchent moins de la vérité que celles de notre méthode III. (51). Un seul exemple ne suffiroit pas pour tirer cette conclusion; mais si on compare les deux formules de densité $\frac{1 + ap}{V(1 + pp)}$ & $\frac{1}{V(1 - ap)} \cdot \frac{1}{V(1 + pp)}$, on verra facilement que la derniere est la moins variable. M. le Chev. de Borda propose d'abord une autre méthode pour calculer la trajectoire dans toute son étendue: c'est la même que nous avons donnée pour les petits angles de projection (74).

86. M. Bézout dans son Cours de Math. à l'usage de l'Artillerie (tom. IV. prend une route différente. Il représente la trajectoire par l'équation $dx = \frac{-dp}{b - ap}$, & détermine les coëfficiens a & b de sorte que la vîtesse initiale & la vîtesse au sommet soient les mêmes que dans la vraie trajectoire. La densité que cette méthode suppose est $\frac{a}{V(1 + pp)}$, quantité qui varie depuis $a \cos\theta$ jusqu'à a dans la branche ascendante, & encore plus dans la branche descendante. Ces variations, qui sont fort sensibles lorsque l'angle de projection est un peu grand, nuisent beaucoup à l'exactitude de cette méthode. Il est vrai que la valeur de a qui est entre 1 & $\frac{1}{\cos\theta}$, sert en partie à corriger les erreurs. Mais il y a un grand inconvénient à supposer la densité trop petite au point de projection; la moindre diminution en ce point peut influer beaucoup sur le reste de la trajectoire. Aussi la méthode de M. Bézout donne-t-elle les portées sensiblement trop grandes.

87. Sans rapporter les formules de l'Auteur, nous nous contenterons d'en indiquer le résultat. Lorsque $h = 10$, & $\theta = 45°$, elles donnent l'amplitude de la branche ascendante $X = 2{,}198969$ & la hauteur du jet $Y = 1{,}519316$; quantités trop grandes, l'une de $\frac{1}{13}$, l'autre de $\frac{1}{11}$. L'amplitude totale se trouve par la même méthode de 3,403946, qui ne differe que de $\frac{1}{15}$ de la vraie amplitude 3,195567. D'où il suit

que l'erreur fur la branche defcendante eft moindre que fur la branche afcendante.

88. La méthode de M. Bézout a beaucoup d'analogie avec la méthode que nous avons donnée pour les petits angles de projection; elles coïncideroient entierement si M. Bézout eût pris $a = \frac{1}{\text{cof } \theta}$. Et comme nous avons trouvé dans le même exemple (78) $X = 1{,}92155$ & $Y = 1{,}35032$, il eft clair que notre méthode a de l'avantage fur celle de M. Bézout pour la branche afcendante. Quand on calcule directement l'amplitude du jet, fans connoître la branche afcendante, la méthode de M. Bézout donne 3,403946 & la nôtre 2,94043; ainfi le défavantage eft de notre côté. Cela vient de ce que la vîteffe au fommet n'eft pas exacte dans notre méthode comme dans celle de M. Bézout. Auffi avons-nous averti que cette méthode ne devoit être employée que pour de petits angles de projection, ou du moins qu'il falloit la rectifier en calculant féparément la branche defcendante. Il en réfulte alors pour l'amplitude totale 3,10501, & l'erreur eft deux fois moindre que celle de M. Bézout. Il en eft de même de la hauteur du jet, qui eft deux ou trois fois plus exacte par notre méthode.

89. Comparons encore ces méthodes lorsque l'angle de projection eft plus petit; elles doivent l'une & l'autre approcher davantage de la vérité. Je prends comme au n°. 79, $h = 10$ & $\theta = 10°$. Il en réfulte fuivant M. Bézout l'amplitude de la branche afcendante $X = 1{,}503883$, la hauteur du jet $Y = 0{,}164635$, & l'amplitude totale $= 2{,}506753$. Ces différentes valeurs font trop grandes de $\frac{1}{60}$, ce qui eft fort loin du degré d'exactitude de notre méthode (82).

Maniere d'avoir égard au changement de denfité.

90. Les boulets de canon pouvant s'élever jusqu'à 8 ou 900 toifes dans l'atmofphere, on conçoit que dans la partie fupérieure de leur tra-

jectoire, la résistance doit être sensiblement diminuée. Il faudra donc apporter quelque changement à nos formules, si nous voulons avoir égard à cette diminution de densité.

91. Ici la premiere méthode ne nous est d'aucun secours. Car l'équation $e^{\frac{s}{k}} = 1 + \&c.$ sur laquelle elle est fondée, n'est vraie que pour le premier élément de la trajectoire. On en auroit à la vérité une semblable pour les élémens suivans: mais il faudroit changer à la fois h, k & θ, ce qui produiroit beaucoup de complication & fort peu d'exactitude. Au contraire la seconde méthode (30) s'applique ici tout naturellement. Il n'y a que la quantité α à changer dans la formule $\frac{1 + \alpha . p^2}{V(1 + p^2)}$. On supposera toujours que la densité est 1 au sommet; alors k, qui jusqu'à présent a représenté l'unité, sera 1 au sommet, & $\frac{1}{\lambda}$ au point de projection, λ étant la densité à ce point. On aura par ce moyen $\alpha = \frac{\lambda \operatorname{cos} \theta - \operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sin}^2 \theta}$, & il faudra avoir attention de déterminer h suivant l'unité supposée. Le calcul fait, on changera, si l'on veut, les résultats en prenant pour unité la valeur de k au point de projection. On éviteroit ce changement d'unités en donnant à la densité la forme $\frac{\beta + \alpha p^2}{V(1 + p^2)}$, & déterminant les coëfficiens α, β de maniere que la densité fût 1 au point de projection, & $\frac{1}{\lambda}$ au sommet. Mais l'exemple suivant fera voir qu'il n'y a pas d'inconvénient à laisser les formules trouvées telles qu'elles sont.

Exemple.

92. Je suppose que la densité au sommet est à la densité au point de projection 1 : 4 : 5, & supposant toujours $h = 10\, k$, $\theta = 45°$ je cherche l'amplitude du jet.

Si la quantité variable k est supposée 1 au sommet, sa valeur au point de projection sera $\frac{4}{5}$; on aura donc $h = 8$, $\lambda = \frac{5}{4}$ & $\alpha = \frac{5}{4} V\, 2 - 1$.

Puis calculant l'amplitude du jet comme au n°. 39, on trouvera $x = 2,695152$. Mais si on prend pour unité la valeur de k au point de projection, en sorte que la densité soit 1 à ce même point & $\frac{4}{5}$ au sommet, il faudra multiplier la valeur de x par $\frac{5}{4}$, & on aura l'amplitude $x = 3,368940$.

93. Lorsque la densité est constante, l'amplitude $= 3,195567$. D'où il suit que la densité diminuant de $\frac{1}{5}$ vers le sommet, l'amplitude augmente d'environ $\frac{1}{20}$ dans cet exemple. Mais il faut examiner avec quel degré de précision la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ représente la densité.

94. Soit la densité 1 au sommet & λ ou $\frac{5}{4}$ au point de projection. Dans la branche ascendante il faut que la densité décroisse continuellement depuis $\frac{5}{4}$ jusqu'à 1 ; un *maximum* ou un *minimum* troubleroit l'exactitude de nos formules. Or effectivement le *minimum* de la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ auroit lieu, si on pouvoit avoir $p^2 = \frac{1}{\alpha} - 2$. Mais cette quantité est négative dans le cas présent où $\alpha = \frac{5}{4} \sqrt{2} - 1$. Donc la densité décroît continuellement depuis le point de projection jusqu'au sommet, ce qui convient parfaitement à notre hypothese. Ainsi nous pouvons être sûrs que la branche ascendante & la vîtesse au sommet seront déterminés très exactement dans notre exemple. Mais si on avoit $\lambda < \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos \theta}$, la densité décroîtroit trop rapidement jusqu'à son *minimum*, qui seroit plus petit que l'unité. Néanmoins ces petites inégalités n'empêcheroient pas que la branche ascendante ne fût calculée assez exactement.

95. Quant à la branche descendante, elle suppose la densité trop grande dans toute son étendue, puisqu'à 45° d'inclinaison, ce qui est encore loin du point de chûte, la densité est $\frac{5}{4}$ comme au point de projection. Il ne faut pas croire cependant qu'en vertu de cette cause l'amplitude soit fort augmentée; comme la densité sera toujours vraie dans une étendue sensible vers le sommet, il n'y aura que l'extrémité de la trajectoire de défectueuse, & c'est celle qui influe le moins sur l'amplitude. Au reste on pourroit,

pour plus d'exactitude, calculer séparément la branche descendante en prenant une valeur plus petite de α.

96. Essayons maintenant si la troisieme méthode ne nous meneroit pas au même but d'une maniere plus simple. D'abord la formule $\frac{1}{V(1-\alpha p)} \cdot \frac{1}{V(1+pp)}$ qui représentoit la densité dans la branche ascendante, peut s'appliquer au cas où la densité est variable. Au lieu de prendre $\alpha = \sin\theta \cos\theta$, on fera en sorte que la densité soit λ au point de projection, ce qui donnera $\alpha = \frac{\lambda^2 - \cos^2\theta}{\lambda^2 \tang\theta}$. Le *maximum* de la densité aura lieu lorsque $p = \frac{1}{3\alpha} \pm V\left(\frac{1}{9\alpha^2} - \frac{1}{3}\right)$. D'où il suit que si $\alpha > \frac{1}{V3}$, il n'y aura point de *maximum*, & la densité décroîtra continuellement depuis le point de projection jusqu'au sommet. Dans notre exemple $\theta = 45°$, $\lambda = \frac{5}{4}$, ce qui donne $\alpha = \frac{17}{25} > \frac{1}{V3}$. Donc il n'y aura pas de *maximum* & la densité sera représentée exactement par notre formule. Il en seroit de même si θ étoit plus petit. Mais si on avoit, par exemple, $\theta = 60°$, quel que fût λ, α seroit plus petit que $\frac{1}{V3}$ & par conséquent il y auroit à la fois un *maximum* & un *minimum*. Dans le cas présent où $\lambda = \frac{5}{4}$, le *minimum* auroit lieu à 52° d'inclinaison, il seroit 0,984. Le *maximum* répondroit à 17° & seroit 1,035. Au reste si la densité paroît diminuer assez rapidement pour qu'à 52° d'inclinaison elle soit déjà moindre qu'au sommet, la portée n'en doit pas être fort augmentée. Car il faut que le projectile parcoure environ la moitié de l'amplitude de la branche ascendante, avant que sa direction soit changée de 8°. Ces inégalités ne doivent donc pas faire craindre de grandes erreurs, & n'empêchent pas que notre méthode ne soit admissible pour des angles de projection même au dessus de 60°.

97. Comme on a substitué la valeur de α dans les formules du n°. 51, & que cette valeur est maintenant différente, voici celles qu'il convient d'employer.

$$\alpha = \frac{\lambda^2 - \text{cof}^2\theta}{\lambda^2 \text{tang}\,\theta},\ C = \frac{\text{cof}\,\theta}{\lambda} - \frac{\alpha}{4\,h\,\text{cof}^2\theta}$$

$$X = 1 - \frac{\text{cof}\,\theta}{\lambda} + C\,L\left(\frac{1 - C}{\frac{\text{cof}\,\theta}{\lambda} - C}\right)$$

$$Y = (1 - C^2)\frac{X}{\alpha} - \frac{C}{2}\text{tang}\,\theta - \frac{1}{3\,\alpha}\left(1 - \frac{\text{cof}^3\theta}{\lambda^3}\right).$$

98. Ces formules donneront l'amplitude de la branche afcendante & la hauteur du jet. Pour calculer l'amplitude de la branche defcendante, il faut commencer par déterminer la hauteur h' dûe à la vîteffe au fommet. Nous la trouverons par la valeur de $\frac{dp}{dx}$ au fommet, & nous aurons (51) $\frac{1}{2\,h'} = \frac{1 - C}{\frac{1}{2}\alpha}$. Mais la formule de la feconde méthode (33) nous donnera plus exactement cette valeur de $\frac{dp}{dx}$, & mettant la valeur de α qui lui convient (91), nous aurons

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h\,\text{cof}^2\theta} + \tfrac{4}{3}\,\text{tang}\,\theta + \frac{2\,\lambda\,\text{fin}\,\theta}{3\,\text{cof}^2\theta}.$$

La raifon pour laquelle nous préférons cette valeur de h', c'eft que la formule $\frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ ne change pas fenfiblement vers le fommet, ce qui eft plus conforme à la vraie denfité. Il faut avouer qu'il y a fur cet élément un peu d'incertitude; car il ne fuffit pas que la denfité diminue depuis le point de projection jufqu'au fommet, d'une quantité donnée, il faut encore connoître la loi de cette diminution, & chaque loi que l'on fuppofera, donnera un réfultat différent pour la vîteffe au fommet. Si on étoit fcrupuleux là-deffus, on pourroit calculer les denfités qui répondent à différentes valeurs de y, & voir dans quelle hypothefe la diminution de denfité feroit plus exactement proportionnelle à y. C'eft cette hypothefe qu'il faudroit admettre.

99. Cela pofé, nous repréfenterons la dénfité dans la branche defcendante par $\frac{1 + \alpha p}{\sqrt{(1 + pp)}}$, & pour qu'elle foit λ au point de chûte où je fuppofe $p = m$, il faudra prendre $\alpha = \frac{\lambda\sqrt{(1 + mm)} - 1}{m}$. Mais comme

la densité a un *maximum*, qui est $\sqrt{(1 + \alpha\alpha)}$ lorsque $p = \alpha$, il faut faire en sorte que α ne soit pas trop grand, afin que $\sqrt{(1 + \alpha\alpha)}$ n'excede pas λ. Dans les cas où α seroit trop grand, il faudroit prendre pour m la tangente d'un angle moindre que l'angle de chûte. Cela supposeroit que la densité est λ un peu avant le point de chûte, & il n'y a pas d'inconvénient. On pourroit encore diminuer λ; mais la meilleure maniere, lorsque λ est sensiblement au dessus de l'unité, c'est de supposer $\sqrt{(1 + \alpha\alpha)} = \lambda$, ou $\alpha = \sqrt{(\lambda^2 - 1)}$. Ainsi dans notre exemple λ étant $\frac{5}{4}$, on prendra $\alpha = \frac{3}{4}$. Puis elle diminuera jusqu'au point de chûte où elle sera à peu près 1 comme au sommet. Par ce moyen l'amplitude sera diminuée depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \frac{3}{4}$; & elle sera augmentée dans le reste de la courbe; d'où résultera une espece de compensation. Il paroît cependant que l'amplitude sera trop petite, & qu'on feroit encore mieux de prendre α un peu plus petit. En effet la densité depuis le sommet jusqu'au point de chûte, se trouvera toujours comprise entre les limites 1 & $\frac{5}{4}$, comme on le désire; mais elle sera la plus grande dans les points qui ont le plus d'influence sur l'amplitude.

Exemple.

100. Les mêmes choses étant supposées qu'au n°. 92, je trouve par les formules précédentes (97) l'amplitude de la branche descendante $X = 1{,}699183$, & la hauteur du jet $Y = 1{,}151767$. Ensuite la formule du n° 98 me donne $\frac{1}{h'} = 2{,}761844$, & comme α suivant le n° précédent doit être $\frac{3}{4}$ ou un peu moins, je prends $b = 1$ (n°. 60). Il en résulte $\alpha = 2\,h'$, & l'équation à résoudre pour trouver l'amplitude de la branche descendante, est $0{,}834056 + x = -2\,\mathrm{L}\left(\frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}x)}{\sin 45^\circ}\right)$.

Je trouve $x = 0{,}996730$, & par conséquent l'amplitude totale $= 2{,}695913$. J'augmente ces résultats de $\frac{1}{4}$, afin d'avoir leurs valeurs en prenant pour unité le k du point de projection.

J'ai l'amplitude de la branche afcendante	-	2,123979
la hauteur du jet	- - -	1,439709
l'amplitude de la branche afcendante	-	1,245912
l'amplitude totale	- - -	3,369891

On voit que l'amplitude s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée par l'autre méthode (92). Cet accord vient non de l'exactitude parfaite des deux méthodes, mais de ce qu'elles s'écartent de la vérité dans le même fens. Car elles donnent toutes deux l'amplitude trop petite, & fi nous fommes fûrs qu'elles approchent beaucoup de la vérité, nous ne pouvons pas cependant dire que ce foit à $\frac{1}{3000}$ près.

Remarque.

101. M. Bézout dans fon Cours d'Artillerie (pag. 445) donne une méthode pour avoir égard au changement de denfité. Il fuppofe que la trajectoire a pour équation $dx = \frac{-dp}{A - Bp}$, A & B étant des conftantes. Mais il en réfulte que la denfité $\frac{ddp}{dpds} = \frac{B}{V(1 + pp)}$, quantité qui bien loin de diminuer vers le fommet, eft au contraire la plus grande en ce point. M. Bézout détermine les conftantes A & B de maniere que la vîteffe initiale foit ce qu'elle doit être, & que la vîteffe au fommet foit dûe à une hauteur $\frac{D}{D'} H$. Il défigne par D & D' les denfités au point de projection & au fommet, & par H la hauteur dûe à la vîteffe au fommet dans le cas d'une denfité uniforme D. Cette hypothefe n'eft appuyée fur aucun fondement certain, & il paroît que l'Auteur en fe fervant de l'équation

$$\frac{2p\,dx}{kk} = -\,d\,\text{tang}\,H : \left(C - \text{tang}\,H\left(\tfrac{1}{2}\,\text{fec}\,H + \tfrac{1}{2}\cot H\,L\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\right)\right)$$

n'a pas fait attention qu'elle fuppofoit la denfité conftante, puifqu'elle réfultoit d'une intégration. M. Bézout calcule féparément la branche defcendante, mais fuivant les mêmes principes qui nous paroiffent vicieux.

Nous avons voulu voir jusqu'à quel point ces suppositions éloigneroient de la vérité. En conséquence nous avons calculé la trajectoire de l'exemple précédent par la méthode de M. Bézout. Nous avons trouvé.

L'amplitude de la branche ascendante -	2,5615
la hauteur du jet - - - -	1,733
l'amplitude de la branche descendante -	1,1312
l'amplitude totale - - -	3,6927.

D'où il suit (100) que la hauteur du jet est trop forte d'un cinquieme, & que l'amplitude est environ trois fois plus éloignée de la vérité que celle qu'on auroit en supposant la densité constante & la même qu'au point de projection.

Formules pour déterminer le tems.

102. La seconde méthode, où nous avons supposé la densité $= \frac{1 + \alpha p^2}{\sqrt{(1 + p^2)}}$, ne nous permet pas de déterminer l'expression du tems. Car la formule $dp\,dx = - g\,dt^2$ donnant $dt \sqrt{g} = \sqrt{(- dp\,dx)}$; si on substitue la valeur de dx (33), on a $dt \sqrt{g} = \frac{- dp}{\sqrt{\left(B - p - \frac{\alpha}{3} p^3\right)}}$, quantité qui n'est point intégrable par les méthodes connues. Heureusement que la troisieme méthode (47) est plus traitable: mais il faut calculer séparément le tems de la montée & celui de la descente.

Tems par la branche ascendante.

103. On aura (51) $dt \sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{- dp}{\sqrt{[\sqrt{(1 - \alpha p)} - C]}}$. Soit $\sqrt{(1 - \alpha p)} - C = \omega^2$, on aura $dt \sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{4}{\alpha} (\omega^2 + C)\, d\omega$; d'où résulte

$$t \sqrt{\frac{2g}{a}} = \frac{4}{\alpha}\left(\frac{\omega^3}{3} + C\omega\right) - \frac{4}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{12\, h \cos^2 \theta} + C\right) \sqrt{\frac{\alpha}{4 h \cos^2 \theta}}.$$

Appellant donc T le tems de la montée, on aura

$$\frac{T}{4} V 2ga = \frac{1+2C}{3} V (1-C) - \left(\frac{a}{12h\cos^2\theta} + C\right) V \frac{a}{4h\cos^2\theta}.$$

La quantité g eſt 30,2 pieds, mais on aura ſoin de la réduire à la même unité que h, & alors T exprimera des ſecondes.

EXEMPLE I.

104. Je ſuppoſe $h = 10$, $\theta = 45°$, & le milieu d'une denſité uniforme, ce qui donne $a = \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}$. Soit de plus l'unité $k = 3750$ pieds, en ſorte que la vîteſſe initiale qui eſt dûe à la hauteur $10\,k$, ſoit d'environ 1500 pieds par ſeconde. Pour trouver le tems de la montée on fera $g = \frac{30,2}{3750}$, & on trouvera $T = 14'', 94$.

EXEMPLE II.

105. Si on ſuppoſe que la denſité diminue à meſure que le corps monte, en ſorte qu'elle ne ſoit plus que $\frac{4}{5}$ au ſommet, tout reſtant d'ailleurs comme dans l'exemple précédent, on prendra $a = \frac{17}{25}$, $h = 8$ parce que l'unité change, & $g = \frac{4}{5} \cdot \frac{30,2}{3750}$ par la même raiſon. D'où l'on conclura $T = 15'', 39$.

Tems par la branche deſcendante.

106. La denſité étant $\frac{1+ap}{V(1+pp)}$, on a (56) $\frac{dp}{dx} = \frac{(1+ap)^2 - C^2}{2a}$. Donc $dt V g = \frac{dp\, V 2a}{V[(1+ap)^2 - C^2]}$, & en intégrant $t V \frac{ga}{2} = L\left(\frac{1+ap+V[(1+ap)^2 - C^2]}{1+V(1-C^2)}\right)$. Formule qui donnera le tems de la deſcente en mettant pour p la tangente de l'angle de chûte.

EXEMPLE I.

107. Soit comme au n° 61, $\alpha = \sqrt{2} - 1$, $p\,74° =$ tang $C^2 = -0{,}03371$. Soit de plus $g = \frac{30{,}2}{3750}$, la denſité étant conſtante, on aura $t = 21'',03$. La vîteſſe étant moindre, il n'eſt pas étonnant que le tems de la deſcente ſoit plus long que celui de la montée. Les deux tems réunis donnent $36''$ en nombres ronds. Si l'on vouloit plus de préciſion, il faudroit chercher une valeur plus exacte de l'angle de chûte.

EXEMPLE II.

108. Pour calculer le tems de la deſcente lorsque la denſité diminue de $\frac{1}{5}$ au ſommet, on prendra les mêmes valeurs qu'au n°. 100; on ſuppoſera de plus $g = \frac{30{,}2}{3750}$ & $p =$ tang $74°$, ce qui donnera $t = 22'',43$. Donc la diminution de denſité augmente le tems total d'environ $1'',8$.

Formule du tems lorsque l'angle de projection eſt petit.

109. Dans ce cas nous avons (74) $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h\cos^2\theta}\, e^{\frac{x}{\cos\theta}}$.

Donc $dt\sqrt{2gh} = \frac{dx}{\cos\theta}\, e^{\frac{x}{2\cos\theta}}$. D'où l'on tire

$$t\sqrt{\tfrac{1}{2}gh} = e^{\frac{x}{2\cos\theta}} - 1.$$

Formule très ſimple qui donnera t en ſecondes, ſi on exprime g avec la même unité que h.

EXEMPLE I.

110. Soit comme au n°. 79, $h = 10$, $\theta = 10°$. Soit de plus l'unité $k = 3750$ pieds; ſi on demande le tems total du mouvement, on fera $x = 2{,}462$, & on trouvera $t = 12'',41$.

EXEMPLE. II.

111. Soit encore $k = 3750$ pieds, $h = 10$, mais $\theta = 45°$. Si on prend l'amplitude trouvée (78) favoir $x = 2{,}94$, on trouvera $t = 34'',86$. Or nous avons trouvé $36''$ par une méthode plus exacte. On voit donc que la formule précédente détermine le tems d'une maniere affez approchée, même lorsque l'angle de projection eft grand, pourvû qu'on fubftitue pour x l'amplitude trouvée tout d'un coup par l'équation du n°. 75. Car fi on eût fubftitué pour x la vraie amplitude 3,196, il en feroit réfulté $t = 42'',91$, ce qui eft trop éloigné de la vérité.

De l'angle de la plus grande portée.

112. Cet angle eft de 45° dans le vide; mais il eft moindre dans un milieu réfiftant, & d'autant moindre que la réfiftance eft plus grande. On en jugera mieux par les Tables ci-après que par les formules prolixes que nous pourrions produire à ce fujet. Ainfi lorsque $h = 9$ ou lorsque la réfiftance initiale vaut neuf fois le poids du corps, on voit que l'angle de la plus grande portée eft entre 30 & 35°, mais plus près de 35. On trouvera facilement par les interpolations que cet angle eft de 32° $55'\frac{1}{2}$, & que la portée correfpondante = 3,2439.

Expériences fur les portées des bombes et des boulets.

113. Si nous avions une fuite d'obfervations exactes fur les portées des piéces d'Artillerie, nous pourrions maintenant décider fi la réfiftance eft fimplement proportionnelle au quarré de la vîteffe, ou fi elle renferme quelqu'autre terme dont nous n'avons pas tenu compte. Dans le cas où notre fuppofition feroit fuffifamment d'accord avec l'expérience, les Tables que nous avons dreffées feroient des Tables de Baliftique telles que l'Académie paroît les défirer. Il refteroit à les étendre & à les interpoler pour d'autres valeurs de h, à fixer l'unité pour différens calibres, & à y ajouter quelques

élémens pour en rendre l'usage plus commode. Nous connoîtrions en même tems la force de la poudre & la résistance de l'air avec plus d'exactitude qu'on n'a pu les déterminer jusqu'à présent. Mais toutes ces connoissances nous manquent à la fois, faute d'observations sur lesquelles on puisse compter. La force de la poudre est si variable, elle dépend de circonstances si minutieuses, qu'avec toutes les précautions possibles, les portées sous le même angle & avec la même charge different souvent entr'elles d'un dixieme & quelquefois plus. Il faudroit donc une quantité prodigieuse d'épreuves, pour avoir quelque degré de certitude sur leur résultat; et quand même on auroit des Tables dressées avec toute l'exactitude possible, on pourroit toujours craindre dans la pratique un vingtieme d'erreur sur les portées.

114. Les Tables qui suivent sont tirées du Cours d'Artillerie déjà cité. Elles renferment diverses épreuves faites à la Fere en 1740 & 1771. On en a de plus récentes & sur différens calibres: mais les angles de projection sont trop petits pour qu'elles nous soient de quelqu'utilité.

TABLE I.

Portées d'une piéce de 24 chargée à 9 ℔ de poudre, le diamêtre du boulet étant de $5^{pouc.}\frac{4}{9}$.

Angle de projection.	Portée.	Angle de projection.	Portée.
1° 11′	300 toises	30°	1910 toises
4	820	35	2020
15	1675	40	2050
20	1740	45	2200
25	1825		

TABLE II.

Portées d'une piéce de 24 chargée à 8 ℔ $\frac{1}{2}$ de poudre, le diamétre du boulet étant de 5^p $\frac{1}{2}$.

Angle de projection	Portées observées dans plusieurs épreuv.	Portée moyenne	Tems.	Angle de projection.	Portées observées dans plusieurs épreuv.	Portée moyenne	Tems.
	toises.	toises.			toises	toises.	
5°	898 -- 910 927 -- 946	920	7″	40°	1851 -- 1913 1967 -- 2001 2023	1951	32″$\frac{4}{5}$
10	1199 -- 1218 1237 -- 1273	1232	10$\frac{1}{4}$	43	2146 -- 2163 2176 -- 2210 2221	2183	34
15	1495 -- 1588 1650 -- 1669	1600	15$\frac{1}{4}$	45	1955 -- 2032 2040 -- 2094 2167	2058	34
20	1636 -- 1689 1783 -- 1796	1726	19	50	1952 -- 1972 1980 -- 2000	1976	36
25	1740 -- 1766 1805 -- 1909	1805	20	60	1487 -- 1584 1689 -- 1766	1631	43$\frac{1}{2}$
30	1843 -- 1877 1945 -- 2030	1924	24$\frac{1}{2}$	70	1123 -- 1194 1271 -- 1351	1235	46
35	1839 -- 1852 1871 -- 1960	1881	27	75	882 -- 885 910 -- 917	899	48$\frac{3}{4}$

TABLE III.

Portées de Bombes du poids de 142 ℔ & de 11 p. 10 l. de diamêtre, jettées par une charge de poudre de 3 ℔ $\frac{3}{4}$.

Inclin.	Portées obſervées	Portée moyen.	Tems	Inclin.	Portées obſervées.	Portée moyen.	Tems.
	toiſes.	toiſes.			toiſes.	toiſes.	
10°	221 - - - 228 249 - - - 257	239	4″	45°	489 - - - 490 505 - 536 - 554	515	15″ $\frac{1}{5}$
20	394 - - - 398 424 - - - 440	414	7 $\frac{1}{3}$	50	481 - - - 488 507 - - - 512	497	16
30	451 - - - 492 516 - - - 537	499	10 $\frac{3}{4}$	60	424 - - - 448 457 - - - 457	447	19 $\frac{1}{3}$
40	544 - - - 569 574 - 575 - 577	568	14 $\frac{2}{3}$	70	297 - - - 328 349 - - - 349	331	22
43	506 - - - 509 517 - 543 - 544	524	14	75	256 - - - 261 265 - - - 298	270	22

115. Il ne faut pas un examen bien rigoureux pour voir que ces expériences ne ſont point d'accord entr'elles, & qu'il en faudroit un bien plus grand nombre pour répandre quelque lumiere ſur les objets qui nous intéreſſent. Tant qu'on ne trouvera pas moyen de rapprocher davantage les expériences les unes des autres, il n'y a que le nombre de ces réſultats qui puiſſe ſuppléer à leur inexactitude. Ainſi pour travailler d'une maniere utile à la perfection de la Baliſtique, il faudroit faire de cinq en cinq degrés cent épreuves au moins pour le même calibre, afin que la portée moyenne ſous chaque inclinaiſon fût exacte à un centieme près. On obſerveroit que tout fût égal dans ces expériences, même l'état de l'atmoſphere, s'il étoit poſſible. Si les réſultats s'accordoient pour un calibre avec notre théorie, il ſuffiroit pour les autres calibres de faire des expériences ſemblables ſous deux inclinaiſons différentes, par exemple ſous 10 & ſous 35 degrés. La théorie acheveroit les Tables pour d'autres degrés d'inclinaiſon.

Mesure de la résistance suivant Newton.

116. Supposons avec Newton que la résistance d'un globe est la moitié de celle qu'éprouve son grand cercle, & que la résistance d'une surface plane est égale au poids d'une colonne d'air qui a pour base la surface choquée, & pour hauteur la hauteur dûe à sa vîtesse. Nous savons que cette mesure réussit assez bien pour les petites vîtesses auxquelles Newton a soumis ses globes; on peut donc s'en servir jusqu'à ce qu'on en connoisse une meilleure. Soit a le diamétre du projectile, δ sa densité, δ' celle de l'air, π le rapport de la circonférence au diamétre; la résistance absolûe sera $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{\delta' u^2}{2}$. Divisant cette quantité par la masse de globe, on aura la force rétardatrice $\frac{3}{8} \cdot \frac{\delta'}{\delta} \cdot \frac{u^2}{a}$ que nous avons nommée ci-dessus $\frac{u^2}{2k}$. Donc $k = \frac{4}{3} a \cdot \frac{\delta}{\delta'}$ C'est la quantité que nous avons prise pour unité dans nos formules.

117. De là on pourroit déduire ce théoreme de M. le Chev. de Borda: *Si les hauteurs dûes aux vîtesses de projection sont comme les diamétres des boulets, les portées sous des angles égaux seront comme ces mêmes diamétres, & les trajectoires seront semblables.*

118. Lorsqu'on voudra avoir égard à la diminution de densité dans la partie supérieure de la trajectoire, on calculera grossierement la hauteur du jet Y & on cherchera la densité qui convient à cette hauteur. Mais sans consulter des Tables de densité, il suffira pour cet objet d'employer la formule de M. Daniel Bernoulli, qui donne pour la densité à la hauteur Y, $\frac{3700}{3700 + Y}$, la densité à l'horizon étant 1, & Y exprimant des toises.

Calcul des épreuves de la Table I.

119. Le diamétre du boulet étant de 5 pouces $\frac{4}{9}$, & la densité de l'air étant environ 6047 fois moindre que celle du fer fondu, on aura $k = 610^{\text{toises}}$. Il faut voir d'après cette unité quelles sont les valeurs de k qui

qui peuvent donner les amplitudes obſervées. Je rejette d'abord la portée ſous 45°, parce quelle eſt trop éloignée des autres, & je réduis celles-ci en unités de 610 toiſes. Ainſi la portée ſous 40° devient 3,36, & la valeur de h qui donne cette portée eſt ſuivant nos Tables 10,68 à peu près. Calculant de même les valeurs de h qui donneroient les autres portées, je trouve

40°	- -	$h =$	10,68
35	- -	$h =$	9,97
30	- -	$h =$	8,21
25	- -	$h =$	7,73
20	- -	$h =$	7,83
15	- -	$h =$	8,95.

La différence de ces réſultats tient ſans doute à bien des cauſes, mais principalement à l'inexactitude des expériences & à l'erreur qu'il peut y avoir dans la valeur de k. On pourroit croire d'abord qu'une partie de ces différences doit être attribuée à la diminution de denſité dont nous n'avons pas tenu compte. Mais alors les valeurs de h devroient croître continuellement depuis la portée de 15° jusqu'à celle de 40. Or elles commencent par décroître ſenſiblement.

120. Puisque la diminution de denſité n'explique pas les différences que nous trouvons dans les valeurs de h, changeons l'unité, & au lieu de 610 toiſes, ſuppoſons $k = 905$, nous trouverons ſuivant les différens degrés d'inclinaiſon

40	- -	$h =$	3,42
35	- -	$h =$	3,28
30	- -	$h =$	3,01
25	- -	$h =$	3,02
20	- -	$h =$	3,23
15	- -	$h =$	3,82.

Valeurs qui s'accordent entr'elles un peu moins mal que les précédentes. On voit par là quelle incertitude il y a ſur la vraie meſure de la réſiſtance & ſur la viteſſe de projection.

121. Si dans l'hypothefe de $k = 610^t$, on prend le milieu des valeurs de h, on trouvera $h = 8,895 = 5426^t$. Calculant d'après cette valeur les portées fous différens degrés d'inclinaifon, on trouveroit des réfultats qui cadreroient à peu près avec les portées obfervées, ou du moins qui ne s'en écarteroient pas plus que ces portées ne s'écartent entr'elles. C'eft ainfi qu'en a ufé M. Bézout dans fon Cours d'Artillerie; mais il n'y a rien à conclure de ces approximations.

122. En effet fi l'on fuppofe $k = 915^t$, ce qui diminue la réfiftance d'un tiers, nous avons vu qu'on fatisfaifoit mieux aux expériences. Or la valeur moyenne de h qui en réfulte eft 3,30 ou 3019^t. Voilà donc la valeur de h réduite presque à la moitié, & cette feconde hypothefe eft plus vraifemblable, puisqu'elle cadre mieux avec l'expérience. Dans le premier cas la vîteffe initiale auroit été de 1400 pieds par feconde, dans celui-ci elle n'eft plus que de 1050.

123. La feule conféquence que je tirerai de là, c'eft que la vîteffe initiale d'un boulet de 24 n'eft peut-être pas auffi confidérable qu'on l'a cru jusqu'à préfent; & ce qui peut confirmer ce foupçon, c'eft que l'angle de la plus grande portée ne paroît pas être fort au deffous de 45°. La vîteffe initiale étant plus petite qu'on ne la fuppofoit, on aura moins à craindre que la réfiftance n'augmente prodigieufement par la preffion de l'atmofphere fur la partie antérieure du globe, & nos Tables s'accorderont d'autant mieux avec l'expérience.

124. Je n'entrerai pas dans d'autres détails fur les expériences que j'ai rapportées. Celles de la Table II. ne s'accordent pas plus que celles de la Table I, & celles de la Table III. qui ne font pas beaucoup plus exactes, fuppofent une vîteffe initiale un peu plus petite que dans les Tables ci-après. Il auroit fallu prolonger celles-ci en donnant à h les valeurs 0, 8, 0, 6 &c.

125. Si on avoit une fuite d'expériences exactes, voici comment il faudroit s'y prendre pour les calculer. On choifiroit, par exemple, les portées fous 35 & 10°; après avoir pris leur rapport, on chercheroit dans la Table la valeur de h ou de $\frac{h}{k}$ qui donne le même rapport. On auroit auffi-

tôt les valeurs absolues de h & de k. On verroit ensuite si ces valeurs donnent les autres portées conformément à l'expérience. Mais pour plus d'exactitude, il faudroit tenir compte de la diminution de densité. Une premiere approximation feroit connoître assez exactement la hauteur du jet, & par conséquent la quantité dont la densité diminue à cette hauteur. On chercheroit donc suivant chaque angle de projection la partie de l'amplitude qui est dûe à la diminution de densité, & retranchant cette partie de chaque portée observée, les restes seroient les vraies amplitudes dans l'hypothese d'une densité constante. On chercheroit ensuite une nouvelle valeur de $\frac{h}{k}$ qui y satisfît, & de là résulteroient les valeurs absolues de h & de k beaucoup plus exactement que par le premier calcul. Mais il faudroit que les valeurs trouvées par deux portées choisies, satisfissent à toutes les autres, sans quoi l'hypothese de résistance qui sert de base à nos calculs seroit fausse.

Telles sont les recherches que je soumets au jugement de l'Académie; elles auroient été plus dignes d'être présentées à cette illustre Compagnie, si l'expérience m'eût fourni des secours suffisans.

Appendice.

I. *Sur la trajectoire dans les milieux dont la résistance est en partie constante & en partie proportionnelle au quarré de la vîtesse.*

126. Si la résistance outre la partie $\frac{u^2}{2k}$ proportionnelle au quarré de la vîtesse, contenoit une partie constante αg, les équations du mouvement seroient (3)

$$dx\,dp = -g\,dt^2$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{u^2}{2k} + \alpha g\right)\frac{dx}{u}.$$

Je divise la seconde par $\frac{dx}{dt}$, & mettant au lieu de $\frac{dx}{dt}$ & $\frac{dt}{u}$ leurs valeurs $\frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$ & $\frac{-dp}{g\sqrt{(1+pp)}}$, j'ai l'équation

$$-\frac{du}{u^3}+\frac{1}{u^2}\left(\frac{p\,dp}{1+pp}+\frac{\alpha\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}\right)=-\frac{1}{2gk}\cdot\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

qui étant intégrée à la maniere des équations linéaires, donne

$$\frac{u^2}{2gk}=\frac{(\alpha^2-1)(1+pp)}{C[\sqrt{(1+pp)}-p]^{2\alpha}+p\sqrt{(1+pp)}-\alpha pp-\frac{1}{2\alpha}}.$$

On déterminera la constante C par cette condition, que $u=V=\sqrt{2gh}$ lorsque $p=\tan\theta$. Cette intégrale est donc algébrique, excepté dans le cas de $\alpha=0$ comme ci-dessus, & dans le cas de $\alpha=\pm 1$.

127. L'équation $d\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\left(\frac{u^2}{2k}+\alpha g\right)\frac{dx}{u}$ peut être encore mise sous la forme

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right):\frac{dx}{dt}=-\frac{ds}{2k}+\frac{\alpha\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

d'où résulte l'intégrale

$$A\frac{dx}{dt}=\left(p+\sqrt{(1+pp)}\right)^{\alpha}\cdot e^{-\frac{s}{2k}}$$

dans laquelle $A=\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{\alpha}:\sqrt{}\cos\theta$. Ces deux intégrales combinées donneront

$$\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{2\alpha}\cdot\frac{K(\alpha^2-1)}{h\cos^2\theta}\cdot e^{\frac{s}{k}}=$$

$$C-\left(\sqrt{(1+pp)}+p\right)^{2\alpha}\left(p\sqrt{(1+pp)}-\alpha pp-\frac{1}{2\alpha}\right).$$

D'où l'on pourra calculer la trajectoire par parties, comme dans la méthode premiere (17).

128. Si la partie constante de la résistance étoit égale à la moitié du poids du corps, on auroit $\alpha=\frac{1}{2}$, & l'équation précédente se simplifieroit beaucoup; elle deviendroit

$$e^{\frac{s}{k}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{h\cos^3\theta}{k(1+\sin\theta)}\cdot\left(c'+p^3+(pp-2)\sqrt{(1+pp)}\right).$$

Et les valeurs séparées de dx & dy seroient intégrables.

129. On pourroit employer ces formules pour déterminer le mouvement d'un projectile dont la vîtesse initiale seroit de plus de 1200 pieds, dans l'hypothese que la résistance seroit alors augmentée de toute la pression de l'atmosphere sur la surface antérieure du globe. Ce surcroît de résistance seroit représenté par αg; il cesseroit d'avoir lieu lorsque la vîtesse seroit réduite à 1200 pieds, & alors on reprendroit les formules ordinaires. Au reste ces déterminations seroient encore bien hypothétiques 1° parce qu'en supposant un vuide derriere le corps, la pression de l'atmosphere ne peut pas agir lorsque l'air lui-même est en mouvement, comme elle agit lorsque l'air est en repos. 2° parce que la vîtesse du corps devenant moindre que 1200 pieds, on ne peut pas supposer qu'il y ait tout d'un coup équilibre entre les pressions de l'atmosphere sur les deux surfaces antérieure & postérieure. Ces difficultés seroient beaucoup moindres si la vîtesse initiale des boulets étoit, comme nous le soupçonnons, sensiblement au dessous de celle qu'on leur attribue. Il en résulteroit aussi que la résistance de l'air n'est pas si considérable, & ce qui peut le faire présumer, c'est que l'air ne pouvant s'échapper latéralement en assez grande quantité, fuit devant le corps & diminue la pression du reste de la masse.

II. *Sur la trajectoire dans les milieux dont la densité à la hauteur* y, *est* $\frac{a}{a+y}$.

130. Cette hypothese de densité convient parfaitement à l'atmosphere, surtout pour les petites hauteurs auxquelles s'élevent les boulets; on fera alors $a = 3700$ toises, si y exprime aussi des toises (118). Si dans l'équation générale $k\,\mathrm{dd}p = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$ on substitue $\frac{a}{a+y}$ au lieu de $\frac{1}{k}$, on aura $\left(1 + \frac{y}{a}\right)\mathrm{dd}p = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}p\,\mathrm{d}x\,\sqrt{(1 + pp)}$; d'où l'on tire en intégrant

$$\left(1 + \frac{y}{a}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{pp}{2a} + \frac{1}{2}p\sqrt{(1 + pp)} +$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(p + \sqrt{(1 + pp)}\right) - \frac{1}{2}C$$

& la conſtante ſera

$$C = \frac{\text{tang}^2 \theta}{a} + \frac{1}{h \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + L \,\text{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Mais $\frac{dp}{dx} = - \frac{g(1 + pp)}{u^2}$, de là on déduit

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{\left(1 + \frac{y}{a}\right)(1 + pp)}{C - \frac{pp}{a} - p\sqrt{(1 + pp)} - L\,[p + \sqrt{(1 + pp)}]}.$$

C'eſt la hauteur dûe à la vîteſſe en un point quelconque, en prenant toujours pour unité la valeur de k au point de projection.

131. Repréſentons l'équation trouvée par $\left(1 + \frac{y}{a}\right) \frac{dp}{dx} = - P$; P étant une fonction connue de p, on aura en ſéparant $\frac{dy}{1 + \frac{y}{a}} = - \frac{p\,dp}{P}$, donc

$$1 + \frac{y}{a} = e^{-\int \frac{p\,dp}{aP}}$$

$$\& \; x = \int - \frac{dp}{P} e^{-\int \frac{p\,dp}{aP}}.$$

D'où il ſuit que la trajectoire peut ſe conſtruire par les quadratures.

132. Nous ne nous arrêterons pas aux conſéquences qu'on pourroit déduire de ces formules. Nous obſerverons ſeulement que la hauteur h' dûe à la vîteſſe au ſommet s'exprime fort ſimplement par la formule

$$\frac{\lambda}{h'} = \frac{\text{tang}^2 \theta}{a} + \frac{1}{h \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + L \,\text{tang}\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Les quantités qui y entrent ſont aſſez connues par ce qui précede; cependant nous rappellerons que la valeur de k eſt 1 au point de projection & λ au ſommet; donc la denſité eſt 1 au point de projection & $\frac{1}{\lambda}$ au ſommet. Connoiſſant la hauteur du jet Y & la denſité au ſommet $\frac{1}{\lambda}$, on connoîtra a par l'équation $\lambda = 1 + \frac{Y}{a}$, ou *vice verſa*. Appliquant cette formule à l'exemple n° 100, on trouvera que la valeur de h' eſt d'environ $\frac{1}{30}$ plus grande que nous ne l'avions ſuppoſée alors d'après la formule du n° 98.

TABLES

pour déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu d'une densité uniforme, la résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse.

Voyez l'art. 83.

TABLE I. $h = 1$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vîtesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,1601	0,0072	0,8454	0,1519	0,3120
10	0,2936	0,0272	0,7217	0,2676	0,5612
15	0,4029	0,0577	0,6196	0,3558	0,7588
20	0,4919	0,0971	0,5330	0,4223	0,9142
25	0,5595	0,1432	0,4581	0,4711	1,0306
30	0,6078	0,1945	0,3923	0,5040	1,1119
35	0,6379	0,2494	0,3336	0,5233	1,1612
40	0,6507	0,3065	0,2807	0,5302	1,1809
45	0,6474	0,3647	0,2328	0,5253	1,1727
50	0,6289	0,4227	0,1892	0,5096	1,1386
55	0,5966	0,4800	0,1496	0,4834	1,0800
60	0,5514	0,5362	0,1139	0,4466	0,9981

TABLE II. $h = 2$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,2979	0,0137	1,4727	0,2711	0,5691
10	0,5194	0,0498	1,1494	0,4432	0,9626
15	0,6864	0,1028	0,9275	0,5600	1,2464
20	0,8150	0,1685	0,7634	0,6393	1,4543
25	0,9064	0,2445	0,6353	0,6942	1,6006
30	0,9672	0,3270	0,5312	0,7278	1,6949
35	1,0006	0,4140	0,4439	0,7436	1,7442
40	1,0093	0,5037	0,3690	0,7442	1,7535
45	0,9954	0,5943	0,3034	0,7311	1,7265
50	0,9612	0,6847	0,2454	0,7052	1,6665
55	0,9086	0,7743	0,1937	0,6670	1,5756
60	0,8393	0,8634	0,1475	0,6155	1,4548

TABLE III. $h = 3$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,4190	0,0196	1,9566	0,3678	0,7868
10	0,7030	0,0693	1,4323	0,5703	1,2733
15	0,9053	0,1400	1,1117	0,6975	1,6028
20	1,0558	0,2265	0,8919	0,7800	1,8358
25	1,1581	0,3238	0,7293	0,8327	1,9908
30	1,2226	0,4287	0,6023	0,8628	2,0854
35	1,2542	0,5385	0,4989	0,8743	2,1285
40	1,2567	0,6507	0,4121	0,8696	2,1263
45	1,2331	0,7638	0,3376	0,8502	2,0833
50	1,1862	0,8765	0,2724	0,8173	2,0035
55	1,1184	0,9884	0,2147	0,7719	1,8903
60	1,0321	1,1004	0,1635	0,7120	1,7441

TABLE IV. $h = 4$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,5270	0,0251	2,3413	0,4485	0,9755
10	0,8577	0,0865	1,6333	0,6682	1,5259
15	1,0836	0,1718	1,2343	0,7988	1,8824
20	1,2478	0,2747	0,9739	0,8799	2,1277
25	1,3556	0,3892	0,7876	0,9300	2,2856
30	1,4206	0,5116	0,6454	0,9563	2,3769
35	1,4491	0,6389	0,5319	9,9638	2,4129
40	1,4454	0,7686	0,4378	0,9545	2,3999
45	1,4133	0,8988	0,3577	0,9306	2,3439
50	1,3558	1,0283	0,2882	0,8925	2,2483
55	1,2759	1,1572	0,2271	0,8403	2,1161
60	1,1762	1,2866	0,1730	0,7758	1,9520

TABLE V. $h = 5$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,6244	0,0302	2,6544	0,5171	1,1415
10	0,9914	0,1018	1,7835	0,7466	1,7380
15	1,2341	0,1996	1,3217	0,8777	2,1118
20	1,4074	0,3163	1,0307	0,9564	2,3638
25	1,5181	0,4449	0,8272	1,0034	2,5215
30	1,5823	0,5818	0,6745	1,0266	2,6089
35	1,6072	0,7233	0,5538	1,0328	2,6400
40	1,5978	0,8671	0,4547	1,0181	2,6159
45	1,5581	1,0111	0,3710	0,9905	2,5486
50	1,4916	1,1543	0,2986	0,9472	2,4388
55	1,4016	1,2966	0,2352	0,8917	2,2933
60	1,2908	1,4400	0,1792	0,8227	2,1135

TABLE VI. $h = 6$.

Angles de projection	Amplitude de la branche aſcendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la viteſſe au ſommet	Amplitude de la branche deſcendante	Amplitude totale
5°	0,7131	0,0349	2,9142	0,5765	1,2896
10	1,1091	0,1158	1,9000	0,8115	1,9206
15	1,3643	0,2244	1,3872	0,9417	2,3060
20	1,5440	0,3530	1,0724	1,0162	2,5602
25	1,6561	0,4937	0,8559	1,0588	2,7149
30	1,7189	0,6426	0,6953	1,0770	2,7959
35	1,7402	0,7963	0,5695	1,0832	2,8234
40	1,7255	0,9519	0,4668	1,0694	2,7949
45	1,6791	1,1075	0,3804	1,0338	2,7129
50	1,6048	1,2619	0,3060	0,9851	2,5899
55	1,5060	1,4155	0,2409	0,9272	2,4332
60	1,3858	1,5705	0,1836	0,8620	2,2478

TABLE VII. $h = 7$.

Angle de projection	Amplitude de la branche aſcendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la viteſſe au ſommet	Amplitude de la branche deſcendante	Amplitude totale
5°	0,7946	0,0393	3,1333	0,6287	1,4233
10	1,2141	0,1285	1,9929	0,8666	2,0807
15	1,4790	0,2468	1,4381	0,9951	2,4741
20	1,6633	0,3841	1,1044	1,0670	2,7303
25	1,7760	0,5390	0,8777	1,1111	2,8871
30	1,8371	0,6965	0,7110	1,1267	2,9638
35	1,8549	0,8606	0,5812	1,1257	2,9806
40	1,8353	1,0263	0,4758	1,1054	2,9407
45	1,7829	1,1918	0,3874	1,0690	2,8520
50	1,7017	1,3560	0,3115	1,0247	2,7264
55	1,5951	1,5192	0,2452	0,9629	2,5580
60	1,4667	1,6840	0,1868	0,8900	2,3567

TABLE VIII. $h = 8$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,8699	0,0435	3,3205	0,6750	1,5448
10	1,3091	0,1403	2,0689	0,9140	2,2231
15	1,5815	0,2673	1,4788	1,0407	2,6222
20	1,7692	0,4154	1,1296	1,1108	2,8801
25	1,8820	0,5760	0,8948	1,1507	3,0327
30	1,9413	0,7449	0,7232	1,1654	3,1067
35	1,9558	0,9180	0,5903	1,1605	3,1162
40	1,9317	1,0928	0,4828	1,1406	3,0723
45	1,8738	1,2669	0,3928	1,1007	2,9745
50	1,7863	1,4395	0,3157	1,0545	2,8408
55	1,6729	1,6111	0,2485	0,9839	2,6568
60	1,5371	1,7844	0,1894	0,9085	2,4456

TABLE IX. $h = 9$.

Angle de projection	Amplitude de la branche ascendante	Hauteur du jet	Hauteur dûe à la vitesse au sommet	Amplitude de la branche descendante	Amplitude totale
5°	0,9399	0,0475	3,4824	0,7164	1,6563
10	1,3957	0,1512	2,1320	0,9556	2,3513
15	1,6741	0,2861	1,5121	1,0802	2,7543
20	1,8645	0,4425	1,1500	1,1483	3,0128
25	1,9770	0,6115	0,9085	1,1855	3,1625
30	2,0344	0,7887	0,7331	1,1990	3,2333
35	2,0457	0,9700	0,5976	1,1931	3,2388
40	2,0175	1,1527	0,4884	1,1700	3,1875
45	1,9547	1,3346	0,3972	1,1313	3,0860
50	1,8615	1,5147	0,3191	1,0785	2,9400
55	1,7418	1,6937	0,2511	1,0112	2,7530
60	1,5994	1,8745	0,1914	0,9297	2,5291

Angle de projection	Ampl branch
5°	1,0
10	1,4
15	1,7
20	1,9
25	2,0
30	2,1
35	2,1
40	2,0
45	2,0
50	1,9
55	1,8
60	1,6

